Problemas Inversos na Teoria dos Polinómios Ortogonais

Amílcar José Pinto Lopes Branquinho

Este trabalho foi realizado no seio da Linha de Investigação de Equações Diferenciais e Aplicações, n.º7, do Centro de Matemática da Universidade de Coimbra (CMUC), durante um estágio de três anos do autor no Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, com uma bolsa de Estudo da Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica (JNICT)

Ciência-BD/2654/93/RM

e com total apoio do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). 33C45 e 42D05

Palavras chave. Polinómios ortogonais, equações diferenciais, relação de recorrência a três termos, transformada de Stieltjes, fracções contínuas, comportamento assimptótico, função de Szegő, funcionais lineares, medidas de Borel, quase ortogonalidade, funcionais semi clássicas, transformações da medida, deformações isospectrais da matriz de Jacobi, problemas espectrais directos e inversos, redes de Toda.

Departamento de Matemática da FCTUC, FCTUC, Universidade de Coimbra, Apartado 3008, 3000 Coimbra, Portugal.

A meus Pais

Por tudo o que por mim fizestes

Sereis sempre um exemplo

À Ana

Esto es todo tuyo

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE DE TABELAS ix

Introdução xi

Motivação xi

Enquadramento Histórico xvi

Descrição Sumária dos Objectivos xxii

Notação e Nomenclatura xxiii

Agradecimentos xxvi

PARTE A. Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais 1

CAPÍTULO I. Polinómios Ortogonais sobre a Recta Real 3

1. Funcionais Lineares 5
2. Teoria da Dualidade 7
3. Algumas Famílias de Polinómios 10
4. Medidas Complexas Associadas 12
5. Exemplos 13
6. Raízes de Polinómios Ortogonais 16
7. Teorema de Poincaré. Classe $M(a, b)$ 21

CAPÍTULO II. Polinómios Ortogonais sobre a Circunferência 29

1. Propriedades Algébricas 31
2. Teorema Análogo de Favard 34
3. Solução Geral duma Relação de Recorrência 36

4. Propriedades das Raízes de $\{\phi_n\}$ Quando $|a_n| < 1$ 38

5. Relação Entre as Duas Noções de Ortogonalidade Tratadas 41

6. Exemplos 45

CAPÍTULO III. Generalização da Teoria de Szegő 51

1. Resultados Básicos 53

2. Fórmula Assimptótica 58

3. Uma Representação para a Medida Associada 64

4. Extensões desta Teoria Realizadas por Geronimus 69

5. Trabalho de Nikishin 72

PARTE B. Generalizações dos Polinómios Ortogonais Clássicos 77

CAPÍTULO IV. Dois Trabalhos do Professor Vicente Gonçalves 79

1. Introdução 81

2. Teorema de Bochner e Suas Consequências 84

3. Discussão da Equação de Pearson 88

4. Fórmula de Rodrigues 90

5. Caracterizações 91

6. Interpretação Electrostática das Raízes dos Polinómios Ortogonais Clássicos 94

7. Caso Não-Homogéneo 97

8. Estudo Completo da Equação Diferencial 100

CAPÍTULO V. Problema de Karlin e Szegő 109

1. Introdução 111

2. Polinómios Ortogonais Semi Clássicos 116

3. Equações Diferenciais em Diferenças 119

4. Extensão ao Teorema de Bochner 122

5. Sobre uma Nova Caracterização 129

PARTE C. Geração de Sucessões de Polinómios Ortogonais Mónicos 135

CAPÍTULO VI. Problemas Inversos sobre a Recta Real 137

1. Introdução 139
2. Problema Directo 143
3. Problema Real Inverso 148
4. Exemplos 150
5. Fórmulas Assimptóticas 152
6. Estabilidade na Classe $M(a, b)$ 156

CAPÍTULO VII. Polinómios Ortogonais Inversos 159

1. Introdução e Definição do Problema 161
2. Condição de Ortogonalidade 162
3. Método para a Inversão de Funcionais 164
4. Exemplo 167
5. Funcionais Lineares de Segundo Grau 169

CAPÍTULO VIII. Problemas Inversos sobre a Circunferência 173

1. Introdução 175
2. Condições Necessárias e Suficientes 176
3. Estabilidade na Classe de Szegő 188
4. Estrutura de $\mathcal{M}_2$ 190

CAPÍTULO IX. Modificações da Medida por meio de Exponenciais 195

1. Introdução 197

2. Identidades para os Menores de Hankel 209

3. Deformações Isospectrais 214

BIBLIOGRAFIA 221

ÍNDICE REMISSIVO 229

ÍNDICE DE TABELAS

1	Clássicos (A)	14
2	Clássicos (B)	15
3	Clássicos (C)	15
1	Clássicos (D)	94
2	Clássicos Generalizados	99
3	Caso Jacobi Generalizado	105

Introdução

Motivação

Este trabalho consta de três partes bem diferenciadas que são o reflexo de cinco anos de investigação do candidato a Doutor na área dos polinómios ortogonais.

Este processo começou em 1989, quando no último ano de licenciatura, frequentámos um curso de Teoria da Aproximação leccionado pelo Professor Joaquin Bustoz (Universidade Estatal do Arizona). A forma de trabalhar deste Professor, mais o atractivo da matéria em estudo (ponto de encontro de várias teorias) levou-nos a sentir atraídos por esta área de investigação. O próprio Professor Bustoz nos aconselhou vários Professores que nos poderiam orientar, e por um acaso em que o destino é fértil, a Professora Fátima Leite encontrou num Congresso o Professor Francisco Marcellán que viria a orientar mais directamente os nossos trabalhos.

Um convite para vir à Universidade de Coimbra não se fez esperar por parte do Professor Jaime Carvalho e Silva, e em 1991, começámos a nossa actividade de investigação com este Professor, no âmbito da Linha de Investigação de Equações Diferenciais e Aplicações.

Com ele e com o Professor Carvalho e Silva estabelecemos um Plano de Doutoramento com duas etapas. A primeira consistia na frequência de um Curso de Mestrado em Matemática na Área de Investigação da Física-Matemática, na Universidade de Coimbra com a correspondente Dissertação, e a segunda na Universidade Carlos III de Madrid, fazendo alguns Cursos de Pós-Graduação englobados no Curso de Doutoramento que aí decorre todos os anos, participando nas actividades do Grupo de Investigação dirigido pelo Professor Marcellán e de alguns estágios nas equipas de investigação de Professores especialistas nos problemas que íamos estudando.

Um processo longo como este é constituido por avanços e recuos. Assim, ainda que a Tese de Mestrado por nós realizada em 1993 [**19**] seja um ponto de partida para o estudo que aqui apresentamos, não lhe seremos completamente fieis. Com isto queremos dizer que alguns dos resultados aí iniciados foram aqui reformulados ou até suprimidos, para obtermos uma maior coerência no trabalho final. Como exemplo disto, temos o Capítulo dedicado aos problemas inversos diferenciais que apresentámos em [**19**], do qual somente aproveitámos algumas ideias aí contidas para a obtenção de outros resultados novos que constam da segunda parte deste trabalho. Seja como for a Tese de Mestrado será sempre um ponto de referência.

O problema em que trabalhámos desde o início foi o de obter a medida associada a uma dada sucessão de polinómios ortogonais, conhecida uma representação para os coeficientes da relação de recorrência a três termos que sabemos verificarem estas sucessões.

Este tipo de problemas são conhecidos na literatura como *problemas inversos.*

Para se começar a trabalhar num problema é necessário passar por várias etapas. A primeira diz respeito à **documentação geral**, aí obtemos a informação de índole geral que nos permite enquadrar o nosso problema numa teoria mais vasta, bem como saber se já alguém se interessou por ele e em que contexto o fez. Após o que chegámos à fase da **obtenção de resultados parciais** que apresentámos em seminários internos e que posteriormente, depois de devidamente refinados, levámos a reuniões científicas da nossa especialidade. É precisamente nesta fase que, em contacto com a comunidade científica, nos são dadas a conhecer outras referências que podem estar mais ou menos relacionadas com o que pretendemos resolver. Há então muitas vezes a necessidade de fazer **estágios** de curta duração por forma a poder discutir com especialistas que trabalham ou estão interessados em problemas afins aos nossos. Depois de tudo isto há que saber dar forma a toda a informação recolhida. Nesta última fase temos que seleccionar bem o material para não nos deixarmos desviar do nosso objectivo ainda que algumas vezes façamos incursões rápidas noutros campos da teoria geral estudada.

Dividímos o nosso trabalho em três partes. Na primeira, expomos as noções gerais da teoria dos polinómios ortogonais e apresentamos a evolução desta teoria no que diz respeito às classes de medidas que foram sendo estudadas. Nesta parte somos influenciados pela leitura dos livros do Szegő [**143**], Geronimus [**56**] e Chihara [**35**], bem como pela perspectiva actual da teoria que pode ser vista pela análise dos livros de Van Assche [**148, 149**], de Nikishin e Sorovkin [**120**] ou do trabalho [**119**]. Queremos realçar que nos dois últimos anos tivemos semanalmente um seminário de investigação sobre polinómios ortogonais, na Universidade Carlos III de Madrid, onde se estudaram os livros [**120, 149**]. Além disso, tivemos a presença de eminentes matemáticos especialistas nesta área de investigação, que completaram, com a análise de problemas de interesse actual, o estudo que aí ia sendo realizado.

Queríamos destacar três destes matemáticos pelo que nos inspiraram na realização deste trabalho.

Comecemos pelo Professor Aptekarev (Universidade de Moscovo, Rússia) que esteve como Professor Convidado na Universidad Carlos III de Madrid no ano lectivo de 1994/95, com o qual trabalhámos no estudo do livro [**120**] bem como sobre a teoria das redes não-lineares de Toda.

De grande importância foi também o Seminário apresentado pelo Professor Stahl (TFH-Berlin, Alemanha) intitulado "Asymptotic Behavior of Orthogonal Polynomials" pois aguçou-nos a curiosidade por um tema antigo que tem despertado muita atenção nos últimos tempos, como prova a publicação do livro de Stahl e Totik [**138**].

Temos ainda que mencionar, sem pretender ser exaustivo, a presença do Professor Peherstorfer (Universidade de Linz, Austria) com quem trabalhámos sobre temas de combinações lineares de polinómios ortogonais (extensões da noção de quase-ortogonalidade) e tivémos interessantes discussões sempre que nos brindou com a sua presença na Universidad Carlos III de Madrid. Neste momento temos um plano de trabalho para um Pós-Doutoramento junto da equipa do Professor Peherstorfer.

Note-se que nestes Seminários não se falou somente de polinómios ortogonais pois tivémos um Curso sobre "Redes Neuronais" leccionado pelo Professor Yves Kamp (Universidade de Louvain-La-Neuve, Bélgica). Este Professor tem vários trabalhos sobre aplicações dos polinómios ortogonais matriciais à Análise de Dados.

A segunda parte do presente trabalho diz respeito ao primeiro tipo de problemas por nós estudados e a que chamámos problemas inversos diferenciais. Como destes problemas surgem as famílias de polinómios ortogonais clássicas bem como as suas extensões naturais, preferimos dar como título generalizações dos polinómios ortogonais clássicos. Começámos por mostrar dois resultados do Professor Vicente Gonçalves [**60, 61**] que podem ser reinterpretados por forma a obtermos duas caracterizações, dos polinómios ortogonais clássicos. Estas caracterizações ainda que já tivessem sido provadas, assumem nos referidos trabalhos uma clareza e generalidade que não conseguimos ver nos anteriores. Assim, mostraremos que as caracterizações que foram sendo descobertas para as famílias de polinómios ortogonais clássicos e que podem ser consultadas em [**4, 26**] já se encontravam aí em período de gestação. Esta parte é a que mais semelhanças tem com [**19**], devendo no entanto realçar-se o trabalho de seriação dos resultados que aí apresentámos por forma a incluí-los junto a novos problemas.

Para a elaboração desta parte, foi de grande utilidade o estágio que realizámos na Faculdade Universitária de Notre Dame de la Paix em Namur (Bélgica) com o Professor Ronveaux e o contacto com o Professor Magnus da Universidade Católica de Louvain-La-Neuve (Bélgica). Do referido estágio resultou o trabalho [**20**].

Os pontos altos da teoria aqui desenvolvida vão ser por nós apresentados no Congresso "Dragoslav S. Mitrinović Memorial Conference" a realizar de 20 a 21 de Junho de 1996.

A terceira parte deste trabalho diz respeito ao estudo dos problemas inversos estruturais, tanto para medidas de suporte na recta real como para aquelas cujo suporte está na circunferência unitária (circunferência centrada na origem das coordenadas e raio um). Este tipo de problemas aparece-nos já na segunda parte, devido a muitos problemas inversos diferenciais se transformarem em estruturais. Voltaremos mais tarde a este ponto. Nesta área encontrámos um vazio pois, ainda que as transformações racionais de medidas estivessem suficientemente estudadas, o caso de quando as novas medidas tinham, associadas uma sucessão de polinómios ortogonais, não tinha sido considerado. Mas o nosso objectivo foi mais ambicioso, pois partimos de uma sucessão de polinómios ortogonais e de outra quase ortogonal associada, e demos condições necessárias e suficientes para que esta sucessão seja de facto ortogonal. Além disso, damos uma representação para a medida associada. Posteriormente inspirados pelo trabalho [**119**] e fruto do estágio realizado na Universidade de Leuven (Bélgica) com o Professor Van Assche, estudámos o comportamento assimptótico destas novas sucessões de polinómios ortogonais.

A partir do momento em que mostrámos a equivalência existente entre este problema e o das modificações racionais das medidas, passámos a um outro tipo de problema que já nos tinha cativado aquando da Tese de Mestrado.

Na verdade, quando estudámos os problemas inversos diferenciais, vimos aparecer medidas do tipo exponencial, mais geralmente conhecidas por tipo Freud. Obtivemos nessa altura algumas relações não-lineares para os coeficientes da relação de recorrência a três termos que generalizavam outras já conhecidas na literatura. No decorrer do estudo de [**120**] vimos como obter, em casos particulares, a partir de propriedades diferenciais dos coeficientes da relação de recorrência a três termos que uma dada sucessão de polinómios ortogonais verifica, informação sobre a medida que lhe está associada. Esta medida tinha a particularidade de ser do tipo exponencial, pelo que vimos aí uma oportunidade de enriquecer o estudo que tínhamos realizado sobre modificações racionais das medidas.

É no decorrer de um seminário realizado pelo Professor Aptekarev e sua posterior discussão, que vislumbrámos a possibilidade de realizar o referido estudo, que já se encontra pendente de aceitação numa revista da especialidade [**10**]. Neste trabalho vemos como um problema da Física Matemática é resolvido à custa da teoria dos polinómios ortogonais. Além disso, mostra-nos como estão relacionadas a teoria de operadores e a dos polinómios ortogonais.

A extensão do problema inverso estrutural a sucessões de polinómios ortogonais associadas a medidas com suporte na circunferência unitária, foi realizado em cooperação com o Professor Golinskii (Academia de Ciências de Ucrania, Kharkov, Ucrania). De notar que este Professor se encontrou na Universidade Carlos III de Madrid durante um mês no ano lectivo de 1994/95. Com ele realizámos o trabalho [**22**].

Enquadramento Histórico

O resultado fundamental da Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais e que usualmente é atribuído a Favard diz-nos que, dada uma sucessão livre de polinómios $\{p_n\}$, i.e. uma sucessão de polinómios tal que $\operatorname{gr} p_n = n$, existe uma correspondência biunívoca entre a existência de uma medida positiva $d\mu$ cujo suporte está em $\mathbb{R}$ tal que

$$\int p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}\,, \quad n,m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

e a existência de sucessões $(v_n) \subset \mathbb{R}^+$, $(b_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} &xp_n = v_np_{n+1} + b_np_n + v_{n-1}p_{n-1} \text{ para } n = 1, 2, \ldots \\ &p_{-1} = 0,\, p_0 = 1,\, (v_n > 0,\, \Im m b_n = 0). \end{aligned} \tag{2}$$

Esta relação de recorrência pode ser escrita em notação matricial por:

$$J \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

onde a matriz tridiagonal

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & v_0 & 0 & & & \\ v_0 & b_1 & v_1 & 0 & & \\ 0 & v_1 & b_2 & v_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

é chamada *matriz de Jacobi*.

Vemos assim que a Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais se encontra estreitamente relacionada com as Teorias da Medida e de Operadores. As relações com a Teoria das Fracções Contínuas e da Aproximação depreendem-se do facto de este resultado, originalmente atribuído a Favard [**43**], aparecer já nos trabalhos de Natanson [**111**], Sherman [**134**] e Shohat [**135**] no contexto das Teoria das Fracções Contínuas. Pelo Teorema de Stone [**142**] se J é a representação matricial de um operador auto-adjunto, então $\operatorname{supp}\mu$ é o espectro do operador e μ a sua medida espectral (veja-se por exemplo [**1, 12, 120**]). Assim sendo, podemos estabelecer como *problema espectral directo*: a partir dos coeficientes (v_n), (b_n) do operador J determinar a medida espectral, i.e.

$$J \quad \longrightarrow \quad \mu\,. \tag{P(a)}$$

Reciprocamente, a relação

$$\mu \quad \longrightarrow \quad J \tag{P(b)}$$

é chamada *problema espectral inverso* (em [**88**] pode ver-se uma resenha de resultados sobre relações entre (P(a)), (P(b))).

De notar que estes problemas na Teoria dos Polinómios Ortogonais são conhecidos por problema inverso (P(a)) e directo (P(b)). Assim é necessário ter em atenção a diferença existente entre problemas Directo e Inverso espectrais e os nossos problemas Inversos.

O trabalho que vamos apresentar é dedicado ao estudo dos problemas Inversos na Teoria do Polinómios Ortogonais.

Estes problemas podem ser abordados de várias formas. Por exemplo, como a função de Stieltjes, associada à medida de ortogonalidade

$$\chi(z;\mu) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x} \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_\nu}{z^{\nu+1}}$$

onde

$$S_\nu = \int x^\nu d\mu(x)\,, \quad \nu = 0, 1, \ldots$$

são os momentos da medida μ, pode ser representada em fracção contínua de Jacobi

$$\chi(z;\mu) = \cfrac{v_0^2}{z - b_0 - \cfrac{v_1^2}{z - b_1 - \cfrac{v_2^2}{\ddots}}},$$

temos um método para resolver o problema espectral inverso e ao mesmo tempo, reduzir o problema espectral directo à solução de um problema de momentos (ver [**1**]).

Tendo-se em conta os processos gerais, somente se conhecem alguns casos em que se conseguiu resolver o problema espectral (P). Entre eles podemos contar como caso dos polinómios ortogonais clássicos (Hermite, Laguerre, Jacobi e Bessel) [**20, 26, 35, 96, 143**], e os polinómios ortogonais associados a matrizes de Jacobi periódicas [**33, 55, 125**].

Os polinómios ortogonais clássicos são tais que a função peso w associada à medida de ortogonalidade verifica uma equação diferencial de primeira ordem, chamada de Pearson, com coeficientes polinomiais

$$(\phi w)' = \psi w\,, \quad \operatorname{gr}\phi \leq 2\,, \quad \operatorname{gr}\psi = 1. \tag{3}$$

Daqui podemos formular dois problemas. O primeiro, é o de como obter os coeficientes da relação de recorrência a três termos que a sucessão de polinómios ortogonais $\{p_n\}$ associada a w definida por (3) verifica. Outro, que é praticamente um seu recíproco, corresponde a determinar em termos de ϕ e ψ uma condição necessária e suficiente para que w definida por (3) tenha associada uma sucessão de polinómios ortogonais.

Estes dois problemas podem ser resolvidos de uma forma elegante [**23**]. De facto, pode ver-se que, formalmente, (3) é equivalente a dizer que existe uma família livre de polinómios $\{p_n\}$ tal que

$$\phi p_n'' + \psi p_n' = \lambda_n p_n\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Mas Vicente Gonçalves [**60**] provou que $\{p_n\}$, definida por (4), verifica uma relação de recorrência a três termos do tipo (2). Além disso, vimos que v_n, b_n em [**23**] podem ser calculados explicitamente a partir de ϕ e ψ. Assim sendo, resta-nos aplicar o Teorema de Favard para concluirmos a demonstração.

Vários foram os autores que, a partir de (3), obtiveram relações importantes para as sucessões de polinómios ortogonais $\{p_n\}$ associadas a w. Estas relações encontram-se em [**4, 26**].

Como generalização natural das famílias clássicas temos aquelas associadas a uma função peso que verifica (3) com ϕ e ψ polinómios quaisquer de graus limitados. O primeiro estudo neste sentido foi realizado por Shohat. Nesse trabalho o autor provou que se

$$(\phi w)' = \psi w\,, \quad \operatorname{gr}\phi \leq s+2\,, \quad \operatorname{gr}\psi \leq s+1 \tag{3'}$$

então a sucessão $\{p_n\}$ que lhe está associada verifica

$$\phi p_n' + \psi p_n = \sum_{k=n-s}^{n+s} a_{n,k} p_k \,, \quad n \geq s \tag{5}$$

$$\phi p_n'' + \psi p_n' = \sum_{k=n-s-1}^{n+s-1} b_{n,k} p_k \,, \quad n \geq s \tag{6}$$

$$A_n p_n'' + B_n p_n' + C_n p_n = 0 \tag{7}$$

onde A_n, B_n, C_n são polinómios cujos coeficientes dependem de n e com grau independente de n.

Este tipo de representações tornou-se importante quando Karlin e Szegő, no estudo realizado em [**76**], propuseram o problema de caracterizar as funções peso associadas a sucessões de polinómios ortogonais que verifiquem (5). A resposta a esta questão foi dada independentemente por Bonan, Lubinsky e Nevai numa série de trabalhos [**17, 18, 113, 114**] e por Maroni em [**100**].

Enquanto os primeiros estiveram mais interessados em determinar explicitamente a medida, Maroni provou que se $\{p_n\}$ verifica (5) então a função peso que lhe está associada verifica (3'). Pode dizer-se que qualquer das condições (6) e (7) caracteriza as sucessões de polinómios ortogonais semi clássicas [**7, 69**]. Além disso, do estudo por nós apresentado em [**19**, Lema II.2, p. 41], estamos em condições de dizer que se $\{p_n\}$ verificar uma relação do tipo (5) tomando em vez de ϕ um polinómio que dependa de n então a medida de ortogonalidade verifica uma equação do tipo Pearson.

A teoria desenvolvida por Maroni para resolver este problema, e a que chamaremos teoria dos polinómios ortogonais semi clássicos, foi para nós uma grande fonte de inspiração. De facto, o conceito de quase ortogonalidade que ele generalizou de Dickinson [**39**] mais o resultado devido a Shohat [**136**] que nos diz como relacionar duas famílias de polinómios, uma ortogonal $\{p_n\}$ e outra quase ortogonal $\{q_n\}$ relativamente à mesma função peso, i.e.

$$\begin{aligned} q_n &= \sum_{k=n-s}^{n} a_{n,k} p_k \,, \quad n \geq s \\ q_n &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k \,, \quad 0 \leq n < s \end{aligned} \tag{8}$$

sugeriu-nos a ideia de estudar o seguinte problema:

— Dar condições necessárias e suficientes para que $\{q_n\}$ assim definida seja uma sucessão de polinómios ortogonais. Além disso, determinar uma representação para a medida associada.

A este tipo de problemas chamaremos *problemas inversos estruturais*.

Estes problemas surgem na literatura associados a modificações racionais da medida [**118, 147**], a geração de novas famílias de polinómios ortogonais [**44**], a problemas de Sturm-Liouville de ordem superior a dois [**80**] ou a equações diferenciais de diferenças [**27**] (cf. Capítulo V).

O primeiro trabalho sobre problemas inversos estruturais foi realizado por Geronimus [**55**] quando a matriz de Jacobi é periódica. Nesse trabalho Geronimus apresentou o problema:

— Construir uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, $\{p_n\}$, que satisfaça

$$xp_{n+s+1} = v_{n+s+1}p_{n+s+2} + b_{n+s+1}p_{n+s+1} + v_{n+s}p_{n+s}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note-se que deixamos arbitrários os primeiros s coeficientes e consequentemente os s primeiros p_j.

No caso particular em que $b_{n+s} = 0$ e $v_{n+s+1} = \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$ pode ver-se que $\{p_n\}$ é uma combinação linear de um número finito de polinómios de Tchebychev de segunda espécie.

Depois dos estudos realizados por Bonan, Lubinsky, Nevai e Maroni continua em aberto o problema de determinar dentre as medidas μ cuja função peso associada verifica (3') aquelas que possuem uma sucessão de polinómios ortogonais associada.

No decurso do estudo realizado em [**137**], Shohat apresentou o comportamento assimptótico dos coeficientes (v_n) da matriz de Jacobi associada a $w(x) = \exp(-x^4)$. De notar que w assim definida verifica $w' = -4x^3w$.

Daqui decorre muito do interesse por estes problemas apresentados. Note-se também que o estudo dos polinómios ortogonais associados a medidas cujo suporte é um conjunto limitado da recta real se encontra devidamente estudado, devido à relação existente com os polinómios ortogonais com suporte na circunferência unitária (ver Geronimus [**56**]). No entanto, quando o suporte é um conjunto não limitado o estudo das propriedades das raízes, o comportamento assimptótico e a representação para os polinómios ortogonais encontra-se ainda hoje em estado de desenvolvimento.

O estudo que realizámos nos Capítulos II e III descrevem a evolução da teoria desenvolvida por Szegő [**143**] sobre os polinómios ortogonais associados a medidas com suporte na circunferência unitária. Mostramos um processo interessante de como obter fórmulas assimptóticas para as sucessões de polinómios ortogonais, apresentado por Nikishin em [**119**] e que no Capítulo VI vamos estender a outro tipo de polinómios. No Capítulo I, apresentamos a teoria desenvolvida por Nevai [**112**] e Van Assche [**149**], para os polinómios ortogonais cujos coeficientes da matriz de Jacobi associada verificam $\lim_{n\to\infty} v_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Este estudo está mais uma vez justificado pelo estudo que realizamos no Capítulo VI.

Este tema tornou-se popular através duma conjectura de Freud sobre o comportamento assimptótico de (v_n) associada à função peso $w(x) = \exp(p(x))$ com p polinómio de grau fixo. Este problema foi resolvido por Magnus [**89, 90**].

Note-se que estes polinómios podem ser vistos como extensões dos de Hermite.

Outro tipo de extensão dos polinómios ortogonais clássicos deriva do estudo realizado por Pollaczek [**127**], onde apresentou um método para determinar a medida associada a sucessões de polinómios ortogonais cujos coeficientes da matriz de Jacobi associada são funções racionais de n.

Este método permitiu a Askey, Bustoz, Ismail e Wimp [**11, 30, 151**] obter as medidas associadas a sucessões de polinómios ortogonais que verificam a mesma relação de recorrência a três termos que as clássicas mas com condições iniciais distintas.

Os resultados obtidos por estes autores permitiram-nos elaborar um estudo complecto das sucessões de polinómios ortogonais que verificam uma equação diferencial que generaliza a de Bochner, i.e.

$$\left(\Phi D^2 + \Psi D + \mu_n I\right) p_{n-1}^{(1)} = 2kp_n'$$

onde Φ, Ψ são polinómios de graus quando muito dois e um, respectivamente (cf. Capítulo IV).

Vemos assim que a teoria dos polinómios ortogonais evoluiu em torno dos polinómios ortogonais clássicos, o que não é de estranhar, pois estes são os polinómios ortogonais com melhores propriedades diferenciais, do que resulta maior facilidade para encontrar uma expressão explícita.

Em muitas destas famílias não se conhecem expressões explícitas, mas o facto de estarem "tão próximas" das clássicas, permite-nos obter em alguns casos o seu comportamento assimptótico, a localização das suas raízes e uma representação para a medida associada.

Sendo assim, o nosso objectivo é, sempre que possível, apresentar estas três características das famílias de polinómios ortogonais.

Descrição Sumária dos Objectivos

A primeira Parte deste trabalho encontra-se plenamente justificada pelas considerações anteriores.

A segunda Parte deste trabalho diz respeito ao estudo dos chamados

"Problemas Inversos Diferenciais"

que começámos aquando da Tese de Mestrado [**19**] e que continuámos com a apresentação dos trabalhos [**20, 21, 27, 23**].

De qualquer forma, queríamos destacar que, no Capítulo IV, apresentamos como teria evoluído a teoria dos polinómios ortogonais clássicos se tivesse sabido a devido tempo dos resultados de Vicente Gonçalves [**60, 61**].

Por outro lado o Capítulo V foi estruturado a partir do trabalho que iremos apresentar no Congresso "Dragoslav S. Mitrinović Memorial Conference" [**27**].

A terceira parte diz respeito à recolha de três trabalhos de investigação [**10, 22, 24**] por nós realizados nos dois últimos anos.

No Capítulo VI damos condições necessárias e suficientes para que a sucessão de polinómios $\{q_n\}$ definida por (7) seja ortogonal. Damos neste caso uma representação para a medida associada. O estudo aqui apresentado encontra-se aceite para publicação [**24**]. Apresentamos, no final, o estudo do comportamento assimptótico de determinadas sucessões de polinómios ortogonais. Nesse estudo tivemos a colaboração de Van Assche.

O Capítulo VII está dedicado a uma extensão dum trabalho de Guerfi e Maroni [**66**], que apresentamos como aplicação do trabalho [**24**]. Assim, damos uma caracterização das sucessões de polinómios ortogonais inversas das clássicas bem como o seu comportamento assimptótico.

No Capítulo VIII resolvemos o problema análogo ao realizado no Capítulo VI mas para o caso em que a medida considerada tem suporte na circunferência unitária. O estudo que aqui apresentamos baseia-se no trabalho [**22**] que foi realizado em colaboração com Golinskii e Marcellán.

No Capítulo IX estudamos medidas que estão na classe de Freud, pois são modificações por meio de exponenciais de medidas de Borel positivas. Aí apresentamos o trabalho que realizámos com Aptekarev e Marcellán em [**10**].

Notação e Nomenclatura

Regra geral utilizaremos, como nesta Introdução, $\{p_n\}$ para denotar as sucessões de polinómios ortonormais em contraposição com $\{P_n\}$ quando nos queremos referir às sucessões de polinómios ortogonais mónicos (i.e. $P_n = x^n + \ldots$). Além disso, os coeficientes da matriz de Jacobi associada a sucessões de polinómios ortonormais serão denotados por b_n, v_n e no caso das famílias mónicas utilizaremos β_n, γ_n, onde $\beta_n = b_n$ e $\gamma_{n+1} = v_n^2$ para $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$.

O sistema de numeração por nós utilizado é o usual, i.e. numeração Romana para os Capítulos e indo-árabe para as secções. Quando nos referirmos a equações escreveremos sempre a sua referência entre parentesis curvos e para a numeração referente a Definições, Teoremas, Corolários, Lemas e Problemas apresentaremos a referência tal qual ela aparecer no enunciado. Assim, se desejarmos referir-nos à equação terceira da segunda secção, dentro do Capítulo III à qual pertence a secção referida, escreveremos (2.3). Se nos encontrarmos noutro Capítulo qualquer referir-nos-emos a esta equação por (III.2.3).

Adoptámos o símbolo de Halmos $\blacksquare$ para representar o final duma demonstração.

Vamos representar o conjunto dos números naturais por $\mathbb{N}$, o conjunto dos números inteiros por $\mathbb{Z}$, o conjunto dos números reais por $\mathbb{R}$ e o conjunto dos números complexos por $\mathbb{C}$. Assim sendo denotaremos os números inteiros positivos por $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$.

Agradecimentos

Ao terminarmos o Projecto de Doutoramento queremos mostrar a nossa mais sincera gratidão a todos aqueles que acreditaram em nós e que nos ajudaram a manter o entusiasmo aceso. Estes foram, pelas razões que sumariamente diremos, os Professores:

- Francisco Marcellán, mentor deste Projecto e com quem compartilhámos os bons e os menos bons momentos;
- Jaime Carvalho e Silva, por todas as indicações e pelo empenhamento que pôs neste Projecto;
- Fernandes de Carvalho, a face do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, que deu o aval a este Projecto e pelas palavras amigas que nos brindou sempre que a ele nos dirigimos;
- Fátima Leite, por nos ter dado o nosso primeiro trabalho de investigação;
- Alexandre Aptekarev, pelos conselhos e indicações fundamentais em diversas situações;

os Amigos:

- Bernardo, Carlos, Carlota, Consuelo, Diego, Ema, Ercília, Francisco, José Miguel, Júlio, Luis, Manolo, Maria José, Paula, Telmo e muito especialmente a Ana, pelos momentos que compartilhámos e a frontalidade e sinceridade que estiveram sempre presentes.

e não queríamos esquecer o Professor Joaquin Bustoz, pois foi ele que nos introduziu nesta área de investigação e esteve assim na base de todo este trabalho.

A Todos Um Grande Abraço

PARTE A

Teoria Geral dos Polinómios Ortogonais

CAPÍTULO I

Polinómios Ortogonais sobre a Recta Real

1.	**Funcionais de Lineares**	**5**
2.	**Teoria da Dualidade**	**7**
3.	**Algumas Famílias de Polinómios**	**10**
4.	**Medidas Complexas Associadas**	**12**
5.	**Exemplos**	**14**
6.	**Raízes de Polinómios Ortogonais**	**16**
7.	**Teorema de Poincaré. Classe $M(a, b)$**	**21**

1. Funcionais Lineares

Vamos introduzir as noções algébricas que necessitamos neste trabalho, que basicamente foram retiradas de [**35, 101**].

Seja $\mathbb{P}$ o espaço linear dos polinómios definidos em $\mathbb{R}$ com coeficientes complexos, e considere-se a *funcional linear* $\boldsymbol{u}$ sobre $\mathbb{P}$, i.e.

$$\begin{array}{rccc} \boldsymbol{u}: & \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & p(x) & \longmapsto & \langle \boldsymbol{u}, p(x) \rangle \end{array}$$

Como $\{x^n\}$ é uma base de $\mathbb{P}$ podemos definir $\boldsymbol{u}$ à custa da acção de $\boldsymbol{u}$ sobre esta base, i.e. $\langle \boldsymbol{u}, x^n \rangle = u_n$. A (u_n) chamaremos *sucessão de momentos.* Definamos de seguida a noção básica desta teoria.

DEFINIÇÃO 1.1. Seja $\boldsymbol{u}$ uma funcional linear. A família de polinómios, $\{P_n\}$, é dita a *sucessão de polinómios ortogonais* associada a $\boldsymbol{u}$ se

$$\operatorname{gr} P_n = n, \text{ i.e. } \{P_n\} \text{ é uma } \textit{família livre de polinómios}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, P_n P_m \rangle = \kappa_n \delta_{n,m}\,, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \kappa_n \neq 0\,.$$

Se o coeficiente do termo de maior ordem de P_n for igual a um então dizemos que $\{P_n\}$ é a *sucessão de polinómios ortogonais mónicos* associada a $\boldsymbol{u}$. Quando uma funcional linear $\boldsymbol{u}$ tiver associada uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos diremos que $\boldsymbol{u}$ é uma *funcional linear regular ou quase definida* no sentido de Chihara [**35**]. Enunciamos um teorema de equivalência sobre a regularidade de uma funcional linear apresentado por Maroni em [**100**].

TEOREMA 1.1. *Sejam* $\boldsymbol{u}$ *uma funcional linear e* (u_n) *a sucessão de momentos associada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- $\boldsymbol{u}$ *é uma funcional linear regular;*
- *O determinante da matriz de Hankel,* $[u_{i+j}]_{i,j=0}^{n-1}$*, é não nulo para todo o* $n \in \mathbb{Z}^+$*, i.e.* $H_n = |u_{i+j}|_{i,j=0}^{n-1} \neq 0$*,* $n \in \mathbb{Z}^+$*;*
- *existe uma sucessão livre de polinómios,* $\{B_n\}$*, tal que*

$$|\langle \boldsymbol{u}, B_k B_m \rangle|_{k,m=0}^{n} \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N};$$

- *para cada família livre de polinómios,* $\{Q_n\}$*, temos*

$$|\langle \boldsymbol{u}, Q_k Q_m \rangle|_{k,m=0}^{n} \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

COROLÁRIO I.1. *Seja* $\boldsymbol{u}$ *uma funcional linear regular; então a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada* $\{P_n\}$ *admite a seguinte representação*

$$P_n(x) = \frac{1}{H_n} \begin{vmatrix} u_0 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n-1} & \dots & u_{2n-1} \\ 1 & \dots & x^n \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.1}$$

$$P_0(x) = 1 \quad \textit{convencionando-se} \quad H_0 = 1.$$

Além disso,

$$\langle \boldsymbol{u}, P_n P_m \rangle = \frac{H_{n+1}}{H_n} \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Vejamos que a sucessão de momentos determina a representação de $\boldsymbol{u}$. De facto, Boas [**15**] demonstrou o seguinte resultado.

TEOREMA 1.2. *Seja* (u_n) *uma sucessão de números reais; então existe uma função real de variação limitada* ϕ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} x^n d\phi(x) = u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na verdade, este resultado permitiu levar a teoria dos polinómios ortogonais desenvolvida por Szegő em [**143**] à ortogonalidade a respeito de uma funcional linear regular.

Antes de mais apresentemos as seguintes definições:

DEFINIÇÃO 1.2. Seja μ uma medida de Borel positiva. Definimos *suporte da medida* μ, $\operatorname{supp}\mu$ como sendo o conjunto

$$\operatorname{supp}\mu = \{z \in \mathbb{C} : \mu(B_{z,\epsilon}) > 0, \quad \forall\, \epsilon > 0\}$$

onde $B_{z,\epsilon} = \{y \in \mathbb{C} : |y - z| < \epsilon\}$.

Vê-se facilmente que $\operatorname{supp}\mu$ é fechado.

Denotemos por $\operatorname{co}(A)$ o *invólucro convexo de* $A \subset \mathbb{C}$, i.e. o menor, no sentido da inclusão de conjuntos, convexo contendo A. Dizemos que $G \subset \mathbb{C}$ é *convexo* se para todo o $x, y \in G$ o segmento que os une estiver contido em G. Assim, podemos dizer que

$$\operatorname{co}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset G \subset \mathbb{C} \\ G \text{ convexo}}} G.$$

Se A for fechado, $\mathrm{co}(A)$ é a intersecção de todos os semi-planos fechados contendo A.

Note-se que se (u_n) for tal que $H_n > 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$; então, dizemos que a funcional linear regular $\boldsymbol{u}$ é *definida positiva*, e existe uma medida de Borel positiva, $d\mu$, tal que $\boldsymbol{u}$ admite a seguinte representação

$$\langle \boldsymbol{u}, x^n \rangle = \int_I x^n d\mu(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde I é o invólucro convexo do suporte de μ, $\operatorname{supp}\mu$, chamado também de verdadeiro intervalo de ortogonalidade.

2. Teoria da Dualidade

Definamos alguns operadores lineares sobre $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned}
p &\mapsto (qp)(x) = q(x)p(x)\,, \quad q \in \mathbb{P} \\
p &\mapsto (\theta_c p)(x) = \frac{p(x)-p(c)}{x-c}\,, \quad c \in \mathbb{C} \\
p &\mapsto (Dp)(x) = p'(x) \\
p &\mapsto (h_a \circ \tau_b p)(x) = p(ax-b)\,, \quad b \in \mathbb{C} \quad \text{e} \quad a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}
\end{aligned}$$

Por dualidade, obtemos os seguintes operadores sobre $\mathbb{P}^*$ (dual algébrico de $\mathbb{P}$):

- $\langle q\boldsymbol{v}, p\rangle = \langle \boldsymbol{v}, qp\rangle$ onde $\langle q\boldsymbol{v}, x^n\rangle = \sum_{i=0}^{\operatorname{gr} q} a_i \langle \boldsymbol{v}, x^{i+n}\rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}$ com $q(x) = \sum_{i=0}^{\operatorname{gr} q} a_i x^i$ e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{P}^*$;
- $\langle (x-c)^{-1}\boldsymbol{v}, p\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \theta_c p\rangle$ então
$$\langle (x-c)^{-1}\boldsymbol{v}, x^n\rangle = \begin{cases} 0 \text{ , se } n=0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} c^{n-1-i}\langle \boldsymbol{v}, x^{i+n}\rangle \text{ , se } n \in \mathbb{Z}^+ \end{cases};$$
- $\langle D\boldsymbol{v}, p\rangle = -\langle \boldsymbol{v}, p'\rangle$ onde $\langle D\boldsymbol{v}, x^n\rangle = -n\langle \boldsymbol{v}, x^{n-1}\rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}$;
- $\langle h_a \circ \tau_b \boldsymbol{v}, p(x)\rangle = \langle \boldsymbol{v}, \tau_{-b} \circ h_{a^{-1}} p(x)\rangle$ onde
$$\langle h_a \circ \tau_b \boldsymbol{v}, x^n\rangle = \frac{1}{a^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-b)^{n-k}\langle \boldsymbol{v}, x^k\rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dado o polinómio $p(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-x_i)^{m_i}$, para todo o $f \in \mathbb{P}$, definimos

$$(\Theta_X f)(x) = \frac{f(x) - (\mathcal{L}f)(x)}{p(x)}$$

onde,

$$(\mathcal{L}f)(x) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_i} f^{(k-1)}(x_i)L_{ik}(x)$$

é o polinómio interpolador de Lagrange-Sylvester (Hermite) de f com nodos em x_i, $i = 1, \ldots, s$ e L_{ik} verifica as seguintes condições:

$$L_{ik}^{(\nu)}(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } \nu = k-1 \text{ e } j = i \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$

para $k = 1, 2, \ldots, m_i$ e $i = 1, \ldots, s$. Então:

DEFINIÇÃO 2.1. A funcional linear $p^{-1}\boldsymbol{u}$ é definida por

$\langle p^{-1}(x)\boldsymbol{u}, f\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \Theta_X f\rangle$, $f \in \mathbb{P}$.

Vimos na secção anterior que podemos expressar a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a uma funcional linear $\boldsymbol{u}$ em termos dos seus momentos (u_n). Aqui vamos dar uma representação para a funcional linear $\boldsymbol{u}$ em termos da sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada. Começamos por definir *base dual*, $(\boldsymbol{\alpha_n})$, duma sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$ não necessariamente ortogonal, por

$$\langle \boldsymbol{\alpha_n}, P_m\rangle = \delta_{n,m}\,, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Assim, se $\boldsymbol{v} \in \mathbb{P}^*$ então

$$\boldsymbol{v} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \boldsymbol{v}, P_n\rangle \boldsymbol{\alpha_n}. \tag{2.1}$$

Vejamos como relacionar esta base com a dual associada à sucessão de polinómios mónicos $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$, $\{\boldsymbol{\alpha'_n}\}$:

— Por um lado temos que

$$\langle \boldsymbol{\alpha'_m}, \frac{P'_{n+1}}{n+1}\rangle = \delta_{n,m} = -\frac{1}{n+1}\langle D(\boldsymbol{\alpha'_m}), P_{n+1}\rangle$$

e por outro $\langle \boldsymbol{\alpha_{m+1}}, P_{n+1}\rangle = \delta_{n,m}$ logo $\langle (n+1)\boldsymbol{\alpha_{n+1}}, P_{n+1}\rangle = -\langle D(\boldsymbol{\alpha'_n}), P_{n+1}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ e portanto,

$$D(\boldsymbol{\alpha'_n}) = -(n+1)\boldsymbol{\alpha_{n+1}}\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

Agora, se $\boldsymbol{u} \in \mathbb{P}^*$ for uma funcional linear associada a $\{P_n\}$, então admite a seguinte representação

$$\boldsymbol{u} = u_0\boldsymbol{\alpha_0}.$$

Além disso, como

$$\langle \boldsymbol{\alpha_n}, P_m\rangle = \delta_{n,m} = \langle \frac{P_n\boldsymbol{u}}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2\rangle}, P_m\rangle\,, \quad m \in \mathbb{N}$$

obtemos que

$$\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{P_n\boldsymbol{u}}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2\rangle}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Na verdade tem-se o resultado, mais geral:

TEOREMA 2.1. *Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos e $(\boldsymbol{\alpha_n})$ a base dual que lhe está associada. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a*

$$\langle \boldsymbol{\alpha_0}, P_0\rangle \boldsymbol{\alpha_0} = \boldsymbol{u}\,.$$

(b) *Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\phi_n \in \mathbb{P}$ de grau exactamente n tal que $\boldsymbol{\alpha_n} = \phi_n\boldsymbol{u}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(c) *As bases duais $\{P_n\}$ e $(\boldsymbol{\alpha_n})$ estão relacionadas por*

$$\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{P_n\boldsymbol{u}}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2\rangle}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

(d) *Existem $(\beta_n) \subset \mathbb{C}$ e $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tais que*

$$\begin{aligned} xP_n &= P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ P_0 &= 1\,, \quad P_1 = x - \beta_0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

(e) *Existem $(\beta_n) \subset \mathbb{C}$ e $(\gamma_n) \subset \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tais que*

$$x\boldsymbol{\alpha_n} = \gamma_{n+1}\boldsymbol{\alpha_{n+1}} + \beta_n\boldsymbol{\alpha_n} - \boldsymbol{\alpha_{n-1}}\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad e \quad \boldsymbol{\alpha_{-1}} = 0.$$

(f) $\dfrac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_{n+1}(y)P_n(x)}{x-y} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k(x)P_k(y)$ *onde* $r_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \gamma_i$.

(g) $P'_{n+1}(x)P_n(x) - P_{n+1}(x)P'_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{r_n}{r_k} P_k^2(x)$ *onde* $r_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} \gamma_i$.

OBSERVAÇÃO . No Teorema anterior as equivalências entre:

- (a) e (d) é o chamado Teorema de Favard-Shohat.
- (a) e (b), (c) e (e) foram demonstradas por Maroni em [**104**].
- (a) e (f) foi demonstrada por Brezinski em [**29**].
- (a) e (g) foi demonstrada por Branquinho em [**19**].

Podemos ainda obter os coeficientes dos polinómios ortogonais em termos dos coeficientes da relação de recorrência a três termos:

TEOREMA 2.2. *Seja* $\{P_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear* $\boldsymbol{u}$ *e verificando a relação de recorrência a três termos* (2.5). *Se*

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \ell_{n+1-k,n+1} x^k \,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.6}$$

então

$$\gamma_n \ell_{k-1,n-1} + \beta_n \ell_{k,n} = \ell_{k+1,n} - \ell_{k+1,n+1} \,, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

DEMONSTRAÇÃO. O resultado sai directamente da comparação dos coeficientes de x^k em (2.5), depois de substituirmos P_n pela expressão (2.6). ■

3. Algumas Famílias de Polinómios

Vejamos que tipo de famílias de polinómios mónicos estão associadas aos operadores definidos na secção anterior. Comecemos pela noção de *quase ortogonalidade*.

DEFINIÇÃO 3.1. Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos e $\boldsymbol{u}$ uma funcional linear. Dizemos que $\{P_n\}$ é *quase ortogonal de ordem* s associado a $\boldsymbol{u}$ se

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{u}, P_n P_m \rangle = 0 \,, \quad |n-m| \geq s+1 \\ &\forall\, r \geq s \quad \langle \boldsymbol{u}, P_{r-s} P_r \rangle \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

OBSERVAÇÃO . Uma sucessão de polinómios mónicos quase ortogonal de ordem 0 é ortogonal. De facto, se $\langle \boldsymbol{u}, P_r^2 \rangle \neq 0$ então $\langle \boldsymbol{u}, P_r^2 \rangle = \gamma_r \langle \boldsymbol{u}, P_{r-1}^2 \rangle$.

Se $\boldsymbol{u}$ for regular, i.e. existir uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{Q_n\}$ associada, então temos a seguinte relação devido a Shohat [**136**]:

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} P_k \,, \quad 0 \leq n \leq s-1 \\ Q_n(x) &= \sum_{k=n-s+1}^{n} a_{n,k} P_k \,, \quad n \geq s \end{aligned} \tag{3.2}$$

com $a_{n,n-s} \neq 0$, $n \geq s$.

Além disso, Maroni provou [**100**]:

TEOREMA 3.1. *Seja* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear* $\boldsymbol{u}$*; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- $\{P_n\}$ *é quase ortogonal de ordem* s *relativamente a* $\tilde{\boldsymbol{u}}$*.*
- *Existe um único polinómio* ϕ *de grau exactamente* s *tal que* $\tilde{\boldsymbol{u}} = \phi \boldsymbol{u}$*.*
- $< \tilde{\boldsymbol{u}}, P_s > \neq 0$ *e* $< \tilde{\boldsymbol{u}}, P_n >= 0$*, para* $n \geq s \neq 1$*.*

Daqui se conclui que a noção de quase ortogonalidade está intimamente ligada com a multiplicação de uma funcional linear por um polinómio.

Associada à modificação da funcional linear $\boldsymbol{u}$, $(x-t)^{-1}\boldsymbol{u}$, temos a chamada sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada de primeira ordem. Assim:

DEFINIÇÃO 3.2. Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$. À sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n^{(1)}\}$ de termo geral

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{u_0} \left\langle \boldsymbol{u_t}, \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} \right\rangle$$

onde u_t representa a acção de $\boldsymbol{u}$ na variável t, chamamos *sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada de primeira ordem.*

Esta sucessão de polinómios ortogonais mónicos satisfaz a mesma relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$, (2.5), mas com condições iniciais $\tilde{P}_{-1}(x) = 1$ e $\tilde{P}_0(x) = 0$. Então $\tilde{P}_n(x) = P_{n-1}^{(1)}(x)$. Definamos outra solução de (2.5).

DEFINIÇÃO 3.3. Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. A sucessão de polinómios ortogonais mónicos definida por

$$P_{n+1}(x;d) = P_{n+1}(x) - dP_n^{(1)}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

é chamada *co-recursiva* correspondente a $\{P_n\}$.

Neste caso vê-se facilmente que as condições iniciais vêm dadas por

$$\begin{cases} P_0(x;d) = 1 \\ P_1(x;d) = P_1(x) - d. \end{cases}$$

Associada à modificação, $h_a \circ \tau_b$, da funcional linear regular $\boldsymbol{u}$ podemos definir uma nova sucessão de polinómios ortogonais mónicos.

DEFINIÇÃO 3.4. Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$. Dizemos que R_n é uma *transformação afim* de P_n se existem parâmetros reais a, b com $a \neq 0$ tais que $R_n(x) = a^{-n} P_n(ax + b)$. Neste caso $\{R_n\}$ satisfaz a seguinte relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \frac{\beta_n - b}{a} R_n(x) + \frac{\gamma_n}{a^2} R_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ &R_0(x) = 1\,, \quad R_1(x) = x - \frac{\beta_0 - b}{a} \end{aligned}$$

onde β_n, γ_n são os coeficientes de (2.5).

4. Medidas Complexas Associadas

Apresentamos agora uma técnica interessante para o cálculo de medidas associadas a uma dada sucessão de polinómios ortogonais mónicos. Comecemos por dar a definição de transformada de Stieltjes de medidas de Borel positivas que pode ser estendida a funcionais lineares regulares.

DEFINIÇÃO 4.1. Sejam μ uma medida de Borel positiva com $\operatorname{supp} \mu \subset \mathbb{R}$. Definimos a *transformada de Stieltjes de* μ, como sendo a função analítica, $\chi(.,\mu)$, dada por

$$\chi(z, \mu) = \int_{\operatorname{supp} \mu} \frac{d\mu(t)}{z - t}\,, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu.$$

O próximo resultado mostra-nos a importância destas funções.

TEOREMA 4.1 (Markov). *Seja* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva* μ. *Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \chi(z, \mu) \quad \textit{uniformemente para} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu.$$

Além disso, como $\{P_n\}$ *verifica* (2.5)

$$\chi(z, \mu) = \cfrac{1}{z - \beta_0 - \cfrac{\gamma_1}{z - \beta_1 - \cfrac{\gamma_2}{\ddots}}}\,.$$

Usando agora o Teorema de Cauchy vemos que $\chi(z,\mu)$ é uma medida complexa para $\{P_n\}$. De facto,

$$\begin{aligned}\int_D & P_n(z)P_m(z)\chi(z,\mu)dz \\ &= \int_D P_n(z)P_m(z)\int_{\operatorname{supp}\mu}\frac{d\mu(t)}{z-t}dz\,, \quad D\subset\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\mu \\ &= 2\pi i\int_{\operatorname{supp}\mu} P_n(t)P_m(t)d\mu(t)\,.\end{aligned}$$

Vejamos agora como determinar a medida associada a uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos co-recursiva quando a medida inicial é conhecida. Considere-se o seguinte resultado devido a Dehesa, Marcellán e Ronveaux [**38**]:

TEOREMA 4.2. *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida positiva de Borel μ. Então, a transformada de Stieltjes da medida correspondente a $P_n(x;d)$, $\chi(z,\mu^d)$ vem dada por*

$$\chi(z,\mu^d) = \frac{\chi(z,\mu)}{d\chi(z,\mu)+1}\,, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\operatorname{supp}\mu. \tag{4.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos por escrever a transformada de Stieltjes da medida co-recursiva μ^d

$$\chi(z,\mu^d) = \cfrac{1}{z-(\beta_0-d)-\cfrac{\gamma_1}{z-\beta_1-\cfrac{\gamma_2}{\ddots}}}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\chi(z,\mu^d)} &= z-(\beta_0-d)-\cfrac{\gamma_1}{z-\beta_1-\cfrac{\gamma_2}{\ddots}} \\ &= d+\frac{1}{\chi(z,\mu)}\end{aligned}$$

o que nos dá directamente (4.1). ■

5. Exemplos

Como exemplos de sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a uma medida positiva temos as chamadas *clássicas* (Hermite, H_n, Laguerre , L_n^α, e Jacobi, $P_n^{\alpha,\beta}$). Estas sucessões de polinómios mónicos são ortogonais

P_n	ϕ	ψ	w	I
H_n	1	$-2x$	$\exp(-x^2)$	$\mathbb{R}$
L_n^α	x	$-x+\alpha+1$	$x^\alpha \exp(-x)$	$[0,\infty[$
$P_n^{\alpha,\beta}$	$1-x^2$	$-(\beta+\alpha+2)x+\beta+\alpha$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$[-1,1]$
B_n^α	x^2	$(\alpha+2)x+2$	$x^\alpha \exp(-2/x)$	$\mathbb{T}$

TABELA 1. Clássicos (A)

relativamente a uma funcional linear $\boldsymbol{u}$ cuja *função peso* associada w é solução da *equação de Pearson*, i.e

$$(\phi w)' = \psi w \tag{5.1}$$

onde $\phi, \psi \in \mathbb{P}$ tais que $\operatorname{gr}\phi \leq 2$ e $\operatorname{gr}\psi = 1$. A funcional linear, $\boldsymbol{u}$, associada a w representa-se por

$$\langle \boldsymbol{u}, x^n \rangle = \int_I x^n w(x) dx\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note-se que (5.1) tem muitas soluções mas, a menos de uma transformação afim na variável temos os casos apresentados na Tabela 1. Vemos assim aparecer uma nova sucessão de polinómios ortogonais mónicos quando $\phi(x) = x^2$ a que chamaremos de Bessel, B_n^α. Esta sucessão de polinómios ortogonais mónicos, durante muito tempo não esteve incluída na classificação das sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas por não ser ortogonal relativamente a uma medida de Borel positiva. De facto, só recentemente Kim, Kwon e Han [**78**] e Durán [**40**], independentemente, encontraram uma funcional com suporte sobre $\mathbb{R}$ para esta sucessão de polinómios ortogonais mónicos.

Pode ver-se que quando $\alpha < -1$ no caso Laguerre, ou $\alpha, \beta < -1$ no caso Jacobi, as funcionais lineares associadas a estas sucessões de polinómios ortogonais mónicos não são definidas positivas. Assim, Ismail et al., usando o processo descrito na secção anterior, apresentaram as medidas complexas associadas às sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas (estes resultados estão apresentados na Tabela 2). O estudo da equação de Pearson em termos de funcional linear, i.e. o estudo da regularidade das funcionais lineares soluções de (5.1), foi por nós apresentado em [**23**]. Voltaremos a este problema no decurso deste trabalho.

NOTAÇÃO . Na Tabela 2:

P_n	w	I	Restrições
L_n^α	$-\Psi(1, 1-\alpha, -z)$	$S(R)$	$\alpha \neq -1, -2, \ldots$
$P_n^{\alpha,\beta}$	$2^{\alpha+\beta+1}\gamma(\alpha+1)\gamma(\beta+1)X^{\alpha,\beta}$	C	$\alpha, \beta \neq -1, -2, \ldots$

TABELA 2. Clássicos (B)

P_n	β_n	γ_{n+1}
H_n	0	$\frac{n+1}{2}$
L_n^α	$2n+\alpha+1$	$(n+1)(n+\alpha+1)$
$P_n^{\alpha,\beta}$	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{4(n+1)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)}$
B_n^α	$\frac{-2\alpha}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$\frac{-4(n+1)(n+\alpha+1)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)}$

TABELA 3. Clássicos (C)

- Ψ é a função de Tricomi (ver [**41**, Cap. 6]).
- $S(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \exp(-R^2) \leq \arg(z) \leq 2\pi - \exp(-R^2)\}$.
- $X^{\alpha,\beta} = (\gamma(\alpha+\beta+2)(z-1))^{-1} {}_2\mathrm{F}_1 \left(\begin{array}{c} 1, \alpha+1 \\ \alpha+\beta+2 \end{array} \middle| 2/(1-z) \right)$.
- $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\} \subset C$.
- $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

A família dos polinómios ortogonais clássicos é importante não só pelas suas aplicações, mas também porque com ela podemos estudar a evolução da teoria dos polinómios ortogonais. De facto, pode ver-se que houve ao longo do tempo interesse em relacionar a medida de ortogonalidade com os coeficientes da relação de recorrência a três termos, i.e. obter uma representação para a medida a partir do conhecimento destes coeficientes, e vice versa. Este problema continua por resolver, no entanto neste trabalho mostramos como proceder para resolver este tipo de problemas para certos casos. Assim, pela análise da Tabela 3 pode ver-se que os coeficientes da relação de recorrência a três termos que as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas verificam são funções racionais de n. Este facto foi o que deu origem ao trabalho realizado por Pollaczek [**127**]. Aí o autor desenvolveu um método para determinar a funcional linear a respeito da qual, uma sucessão de polinómios mónicos que verifique uma relação de recorrência a três termos com coeficientes racionais em n, é ortogonal. Utilizando este método Askey e Wimp [**11**], Wimp [**151**] e Bustoz e Ismail [**30**] determinaram a medida de Borel positiva associada às sucessões de polinómios ortogonais mónicos pertencentes à família clássica generalizada, i.e.

sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n^{(a)}\}$ que verificam uma relação de recorrência a três termos do tipo

$$\begin{aligned} &xP_n^{(a)} = P_{n+1}^{(a)} + \beta(n+a)P_n^{(a)} + \gamma(n+a)P_{n-1}^{(a)}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ &P_0^{(a)} = 1\,, \quad P_1^{(a)} = x - \beta(a). \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde definimos os $(\beta(n))$ e $(\gamma(n))$ como sendo os coeficientes correspondentes da família clássica (ver Tabela 3). O caso Bessel não foi estudado por estes autores.

Pode ver-se no caso Jacobi que

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \frac{1}{4}.$$

Nevai definiu a família de sucessões de polinómios ortogonais mónicos cujos coeficientes da relação de recorrência a três termos verificam esta duas condições, denotando-a por $M(1,0)$. Um estudo destas sucessões de polinómios ortogonais mónicos encontra-se em [**149**]. Nesse trabalho o autor mostra-nos que essencialmente as sucessões de polinómios ortogonais mónicos que estão em $M(1,0)$ se comportam assimptoticamente como os polinómios de Tchebychev $\{P_n^{-1/2,-1/2}\}$.

Uma generalização dos polinómios de Hermite foi estudada por Freud. Ele considerou sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a funções peso da forma $\exp(-x^n + \ldots)$. Durante este trabalho voltaremos a considerar estas famílias de polinómios ortogonais.

6. Raízes de Polinómios Ortogonais

Uma das características mais importantes dos polinómios ortogonais é o comportamento das suas raízes. Sabemos do Teorema fundamental da Álgebra que todo o polinómio de grau n com coeficientes reais tem n raízes (contando as suas multiplicidades) em $\mathbb{C}$. Quando tratamos com polinómios ortogonais podemos dizer um pouco mais acerca da sua localização.

Comecemos por enunciar um resultado fundamental para o que se segue.

TEOREMA 6.1. *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva μ. Então*

$$\min_{q_n = z^n + \ldots} \left(\int_{\operatorname{supp}\mu} |q_n(z)|^2 d\mu(z) \right)^{1/2} = \kappa_n$$

é atingido para $q_n = P_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Ver [**35**]. ■

Vejamos de seguida um resultado devido a Fejér e apresentado por Saff [**133**], que nos dá a localização para as raízes de uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a uma medida de Borel positiva com suporte em $\mathbb{C}$.

TEOREMA 6.2. *Se* $\{P_n\}$ *é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* μ *então as raízes de* P_n *estão em* $\mathrm{co}(\operatorname{supp}\mu)$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{co}(\operatorname{supp}\mu)$ raiz de P_n e escrevamos $P_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z)$ com $q_{n-1}(z) = z^{n-1} + \dots$ Como $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{co}(\operatorname{supp}\mu)$, existe um semi-plano fechado G tal que $\operatorname{supp}\mu \subset G$ e $z_0 \notin G$. A fronteira deste semi-plano é uma linha, L, que separa $\operatorname{supp}\mu$ e z_0. Seja z_1 o ponto de L mais próximo de z_0, então para todo o $z \in \operatorname{supp}\mu$

$$|z - z_0| = |z - z_1| + |\hat{z} - z_0|$$

onde $\hat{z}$ é a intersecção da linha que liga z a z_0 com o círculo de centro z e raio $|z - z_1|$. Assim,

$$|z - z_0| > |z - z_1|, \quad \forall\, z \in \operatorname{supp}\mu$$

e portanto

$$\int_{\operatorname{supp}\mu} |(z - z_1)q_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) < \int_{\operatorname{supp}\mu} |P_n(z)|^2 d\mu(z)$$

em contradição com o Teorema 6.1. ■

Vejamos agora o que se passa com as raízes dos polinómios ortogonais com suporte na recta real.

TEOREMA 6.3. *Seja* $\{p_n\}$ *a sucessão de polinómios ortonormais associada à medida de Borel positiva* μ. *Então:*

- *As raízes de* p_n *são reais e simples.*
- *Se o* $\operatorname{supp}\mu \subset [a, b]$ *então as raízes de* p_n *encontram-se em* $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO. Verifiquemos que as raízes de p_n são reais. Se p_n é uma sucessão de polinómios ortonormais então verifica a seguinte relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &xp_n(x) = v_n p_{n+1} + b_n p_n + v_{n-1} p_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ &p_{-1} = 0\,, \quad p_0 = 1 \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde os coeficientes b_n e v_n estão relacionados com os coeficientes da relação de recorrência a três termos satisfeita pelos mónicos que lhes estão associados (2.5), por $\beta_n = b_n$ e $\gamma_n = v_{n-1}^2$.

Reescrevamos (6.1) na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} b_0 & v_0 & & & \\ v_0 & b_1 & v_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & v_{n-2} & b_{n-1} & v_{n-1} \\ & & & v_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \\ p_n(x) \end{bmatrix} + v_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} p_{n+1}(x) = x \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \\ p_n(x) \end{bmatrix}$$

Seja $x_{j,n}$ tal que $p_n(x_{j,n}) = 0$, $j = 1, \dots, n$. Então $x_{j,n}$ é um valor próprio da *matriz de Jacobi de ordem* n

$$J_n = \begin{bmatrix} b_0 & v_0 & & & \\ v_0 & b_1 & v_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & v_{n-3} & b_{n-2} & v_{n-2} \\ & & & v_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

com vector próprio $[p_0(x) \ \dots \ p_{n-1}(x)]^t$. Como J_n é uma matriz simétrica os seus valores próprios são reais.

A simplicidade sai dum análogo do Teorema 2.1 (g) para sucessão de polinómios ortonormais

$$v_{n-1}(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p_{n+1}(x)p'_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} p_k^2(x)$$

Seja x_0 uma raiz de p_n com multiplicidade maior que 1. Então

$$\sum_{k=0}^{n} p_k^2(x_0) = 0, \text{ o que é absurdo pois } p_0(x_0) > 0.$$

Como $\mathrm{co}(\operatorname{supp}\mu) \subset [a, b]$, do teorema anterior resulta que as raízes de p_n estão em $[a, b]$. ■

OBSERVAÇÃO . Por uma questão de clareza da demonstração considerámos no teorema anterior uma sucessão de polinómios ortonormais. Note que os polinómios mónicos resultam destes por divisão pelo termo de maior ordem.

As raízes de dois polinómios consecutivos de uma dada sucessão de polinómios ortogonais mónicos estão interlaçadas.

TEOREMA 6.4. *Seja* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a uma medida de Borel positiva com suporte na recta real. Sejam* $x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n}$ *as raízes de* P_n *e* $x^{(1)}_{1,n-1} < x^{(1)}_{2,n-1} < \cdots < x^{(1)}_{n-1,n-1}$ *as raízes de* $P^{(1)}_{n-1}$. *Então:*

- $x_{j,n} < x_{j,n-1} < x_{j+1,n}$ *para* $j = 1, \ldots, n-1$.
- $x_{j,n} < x^{(1)}_{j,n-1} < x_{j+1,n}$ *para* $j = 1, \ldots, n-1$.

DEMONSTRAÇÃO. Consultar por exemplo [**35, 149**]. ■

Vejamos uma utilidade das raízes dos polinómios ortogonais. Sejam $\mathcal{N} = \{t_1, \ldots, t_n\}$ um conjunto de $n \in \mathbb{Z}^+$ números distintos e

$$F(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - t_j).$$

Então $F(x)/(x - t_j)$ é um polinómio de grau $n-1$ e

$$\lim_{x \to t_j} \frac{F(x)}{x - t_j} = F'(t_j) \neq 0.$$

Assim $\ell_j(x) = \frac{F(x)}{(x-t_j)F'(t_j)}$ é um polinómio de grau $n-1$ verificando $\ell_j(t_k) = \delta_{j,k}$.

Sendo f uma função, definida num conjunto que contém $\mathcal{N}$, definimos o *polinómio interpolador de Lagrange associado a* f com nodos nos elementos de $\mathcal{N}$ por

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\ell_j(x).$$

Vamos à custa deste polinómio calcular uma aproximação para o integral, $I(f) = \int f d\mu$, a que chamaremos *fórmula de quadratura de Gauss* e denotá-la-emos por $I_n(f)$. Tomando o polinómio L_n para uma aproximação de f obtemos

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^{n} f(t_j) \int \ell_j(x) d\mu(x)$$

Estamos interessados em determinar um conjunto de nodos para o qual se tenha a igualdade $I(f) = I_n(f)$ para um "maior" número de funções.

DEFINIÇÃO 6.1. Diremos que a fórmula de quadratura é *exacta de ordem* k se $I(f) = I_n(f)$ para $f \in \mathbb{P}_k$.

Vamos ver que os melhores nodos são as raízes dos polinómios ortogonais associados a μ (cf. [**35**]).

TEOREMA 6.5. *Seja* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* μ. *Então a fórmula de quadratura tomada nas raízes do polinómio* P_n, $\{x_{1,n}, \dots, x_{n,n}\}$, *é exacta de ordem* $2n-1$.
Além disso, se denotarmos por $\lambda_{j,n} = \int \ell_j(x) d\mu(x)$ *então*

$$\lambda_{1,n} + \cdots + \lambda_{n,n} = \int d\mu(x).$$

A $\lambda_{j,n}$ chamamos *números de Christoffel* .

As raízes dos polinómios ortogonais estão também relacionados com propriedades extremais, como se depreende do seguinte resultado devido a Tchebychev.

TEOREMA 6.6. *Sejam* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva* μ *e* $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$ *as raízes de* P_n. *Então*

$$\max_{q_n = x^n + \dots} \frac{\int x q_n^2(x) d\mu(x)}{\int q_n^2(x) d\mu(x)} = x_{n+1,n+1}$$
$$\min_{q_n = x^n + \dots} \frac{\int x q_n^2(x) d\mu(x)}{\int q_n^2(x) d\mu(x)} = x_{1,n+1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Do teorema anterior concluímos

$$\frac{\int x q_n^2(x) d\mu(x)}{\int q_n^2(x) d\mu(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{j,n+1} x_{j,n+1} q_n^2(x_{j,n+1})}{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{j,n+1} q_n^2(x_{j,n+1})}$$

mas $x_{1,n+1} \le x_{j,n+1} \le x_{n+1,n+1}$ logo

$$x_{1,n+1} \le \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{j,n+1} x_{j,n+1} q_n^2(x_{j,n+1})}{\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{j,n+1} q_n^2(x_{j,n+1})} \le x_{n+1,n+1}$$

Tomando $q_n(x) = \frac{P_{n+1}}{x - x_{1,n+1}}$ obtemos que o quociente dos integrais supra citados é igual a $x_{1,n+1}$. Procedendo da mesma forma com $q_n(x) = \frac{P_{n+1}}{x - x_{n+1,n+1}}$ obtemos $x_{n+1,n+1}$. ■

7. Teorema de Poincaré. Classe $M(a,b)$

Nesta secção continuamos o estudo do comportamento das raízes de sucessões de polinómios ortogonais associadas a uma medida de Borel positiva μ. Vamos, por uma questão de comodidade, considerar a sucessão de polinómios ortonormais, $\{p_n\}$, associada a μ. Então sabemos que $\{p_n\}$ verifica (6.1).

DEFINIÇÃO 7.1. Dizemos que μ associada a uma sucessão de polinómios ortonormais pertence à *classe de Blumenthal-Nevai,* $M(a,b)$ se

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{a}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Antes de estudarmos como é o suporte de μ demos alguns resultados auxiliares.

LEMA I.1 (Gershgorin). *Seja* $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$. *Os valores próprios de* A, $x_1, \ldots, x_n$ *encontram-se numa das seguintes regiões*

$$x_j \in \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| < \sum_{j\neq i} |a_{i,j}| \right\}$$
$$x_j \in \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}| < \sum_{k\neq i} |a_{k,i}| \right\}$$

LEMA I.2. *Seja* $\{p_n\}$ *a sucessão de polinómios ortonormais associada à medida de Borel positiva* $\mu \in M(a,b)$. *Então, para todo o* $\epsilon > 0$ *o número de raízes de* p_n *fora do intervalo* $]b-a-\epsilon, b+a+\epsilon[$ *é majorado pela constante* $2m(\epsilon)$ *independente de* n.

DEMONSTRAÇÃO. Vimos no Teorema 6.3 que as raízes de p_n, $x_{j,n}$, são os valores próprios da matriz de Jacobi associada, J_n. Do Lema de Gershgorin tiramos que

$$x_{j,n} \in \bigcup_{j=0}^{n-1}]b_j - v_{j-1} - v_j, b_j + v_{j-1} + v_j[\quad \text{com} \quad v_{-1} = 0.$$

Então

$$\min_{j=0,\ldots,n-1} (b_j - v_{j-1} - v_j) < x_{j,n} < \max_{j=0,\ldots,n-1} (b_j + v_{j-1} + v_j) \tag{7.1}$$

Considerem-se agora as raízes, $x_{j,n}^{(m)}$, do polinómio associado de ordem m, $p_n^{(m)}$. Então (7.1) toma a forma

$$\min_{j=0,\ldots,n-1}(b_{j+m} - v_{j+m-1} - v_{j+m}) < x_{j,n}^{(m)} < \max_{j=0,\ldots,n-1}(b_{j+m} + v_{j+m-1} + v_{j+m})$$

Seja $m = m(\epsilon)$ tal que

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{3}, \quad e \quad |v_{n-1} - \frac{a}{2}| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{para } n \geq m;$$

então

$$b_{j+m} + v_{j+m-1} + v_{j+m} < b + a + \epsilon$$
$$b_{j+m} - v_{j+m-1} - v_{j+m} > b - a - \epsilon$$

logo

$$b - a + \epsilon < x_{j,n}^{(m)} < b + a + \epsilon.$$

Então as raízes de $p_n^{(m)}$ estão em $[b - a - \epsilon, b + a + \epsilon]$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Do Teorema 6.4 sabemos que

$$x_{j,n+m} < x_{j,n}^{(m)} < x_{j+m,n+m} \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n$$

Tomando $j = 1$ vemos que existem quando muito m raízes de p_{n+m} em $]-\infty, b-a-\epsilon[$ e para $j = n$ existem quando muito m raízes de p_{n+m} em $]b+a+\epsilon, \infty[$ (isto para todo o n). Portanto o número de raízes fora do intervalo $]b-a-\epsilon, b+a+\epsilon[$ é quando muito $2m$. ■

A localização das raízes dos polinómios ortogonais na recta real está intimamente relacionada com o $\operatorname{supp}\mu$.

LEMA I.3. *Seja $\{p_n\}$ a sucessão de polinómios ortonormais associada à medida de Borel positiva μ.*

(a) *Seja $]c, d[$ tal que $\mu(]c, d[) = 0$; então existe quando muito uma raiz de p_n em $]c, d[$.*

(b) *Suponhamos que os polinómios são densos em $L_1(\mu)$ e que existe $]c, d[$ tal que $\mu(]c, d[) > 0$. Então, para n suficientemente grande p_n tem pelo menos uma raiz em $]c, d[$.*

DEMONSTRAÇÃO. (a). Suponhamos que existem duas raízes de p_n em $]c,d[$, i.e. existem $x_1, x_2 \in]c,d[$ tais que $p_n(x_i) = 0$, $i = 1,2$, então $p_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)q_{n-2}(x)$. Assim,

$$0 = \int_{\operatorname{supp}\mu} p_n(x)q_{n-2}(x)d\mu(x)$$
$$= \int_{\operatorname{supp}\mu} (x-x_1)(x-x_2)(q_{n-2}(x))^2 d\mu(x) > 0$$

o que é absurdo.

(b). Suponhamos que p_n não tem raízes em $]c,d[$. Considere-se q_m de grau m tal que $q_m(x) \leq 0$, $x \in \mathbb{R}\backslash]c,d[$. Então para $m \leq 2n-1$ a fórmula de quadratura de Gauss dá-nos

$$\int q_m(x)d\mu(x) \leq 0$$

Seja $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq c \text{ ou } x \geq d \\ (x-c)(d-x) & c < x < d \end{cases}$ então f é contínua e positiva em $\mathrm{L}_1(\mu)$. Seja q_m um polinómio negativo em $\mathbb{R}\backslash]c,d[$ com $\|f - q_m\|_1 \leq \epsilon$ para n suficientemente grande. Então

$$\int f d\mu \leq \int |f - q_m| d\mu + \int q_m d\mu \leq \epsilon$$

para todo o $\epsilon > 0$, o que é impossível. ∎

De (b) do lema anterior concluímos que todo o ponto de $\operatorname{supp}\mu$ é ponto de acumulação das raízes dos polinómios ortogonais, sempre que os polinómios sejam densos em $\mathrm{L}_1(\mu)$. Este é o caso em que $\operatorname{supp}\mu$ é um conjunto compacto.

Estamos em condições de enunciar:

TEOREMA 7.1. *Seja $\mu \in M(a,b)$; então para todo o $\epsilon > 0$, $\operatorname{supp}\mu$ tem quando muito $2m(\epsilon)$ pontos fora de $[b-a-\epsilon, b+a+\epsilon]$.*

DEMONSTRAÇÃO. A sucessão $(x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente para cada j devido à propriedade do interlaçamento. É também limitada inferiormente por (7.1), logo existe x_j tal que $\lim_{n\to\infty} x_{j,n} = x_j$. Do Lema I.2 vemos que quando muito m destes pontos estão em $]-\infty, b-a-\epsilon[$, e como todo o ponto de $\operatorname{supp}\mu$ é um ponto de acumulação das raízes, resulta que quando muito m pontos de $\operatorname{supp}\mu$ não estão em $]b-a-\epsilon, b+a+\epsilon[$.

Da mesma forma vemos que $(x_{n-j+1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente e majorada por $b+a+\epsilon$. Utilizando um processo análogo concluímos que existem quando muito m raízes à direita de $b+a+\epsilon$. ■

Vejamos como quantificar $2m(\epsilon)$.

COROLÁRIO I.2. *Sejam $\mu \in M(a,b)$ e $\{p_n\}$ a sucessão de polinómios ortonormais que lhe está associada. Então, existe s tal que* $\operatorname{supp}\mu^{(s)} = [b-a-\epsilon, b+a+\epsilon]$, *onde $\mu^{(s)}$ é a medida de Borel positiva associada a $\{p_n^{(s)}\}$.*

Considere-se o quociente entre dois polinómios consecutivos da sucessão de polinómios ortonormais $\{p_n\}$, $\frac{p_{n-1}}{p_n}$. Como função racional que é, $\frac{p_{n-1}}{p_n}$ admite a seguinte representação

$$\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{j,n}}{x - x_{j,n}}$$

onde $a_{j,n} = \frac{p_{n-1}(x_{j,n})}{p_n'(x_{j,n})}$. Pode ver-se ainda que

$$\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = v_{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j,n} p_{n-1}^2(x_{j,n})}{x - x_{j,n}} \tag{7.2}$$

Vamos ver que a classe $M(a,b)$ é a ideal para o estudo do comportamento assimptótico de $\frac{p_{n-1}}{p_n}$.

Antes de prosseguirmos vamos enunciar um resultado fundamental na teoria da Análise Complexa.

TEOREMA 7.2 (Stieltjes-Vitali). *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções analíticas num domínio — aberto e conexo — G de $\mathbb{C}$. Se $\{f_n\}$ é uniformemente limitada em G e converge num subconjunto E de G onde E tem um ponto de acumulação, então $\{f_n\}$ converge uniformemente em G.*

Estudemos o comportamento de $\frac{p_{n-1}}{p_n}$ em $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu$.

TEOREMA 7.3. *Sejam $\mu \in M(a,b)$ com $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ e um compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \frac{a}{x - b + \sqrt{(x-b)^2 - a^2}} \quad \textit{uniformemente em } K. \tag{7.3}$$

Além disso, $\operatorname{supp}\mu = [b-a, b+a] \cup E^*$ *com $E^* \cap [b-a, b+a] = \emptyset$ e E^* contém quando muito um número enumerável de pontos. Se E^* tiver pontos de acumulação então estes serão $b \pm a$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja K um compacto de $\mathbb{C} \setminus [b-a, b+a]$ tal que $K \cap [b-a, b+a] = \emptyset$. Seja Z_N a aderência do conjunto das raízes de p_n para $n \geq N$. Então pelos Lemas I.2, I.3 temos $K \cap Z_N = \emptyset$ para N suficientemente grande. Assim $\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}$ é uma função analítica em K.

Denotemos por $\delta = \mathrm{d}(K, Z_N) > 0$. Sobre K e para $n \geq N$ temos de (7.2)

$$\left|\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\right| \leq v_{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_{j,n} p_{n-1}^2(x_{j,n})}{|x - x_{j,n}|}$$

Mas da fórmula de quadratura de Gauss vemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{j,n} p_{n-1}^2(x_{j,n}) = \int p_{n-1}^2(x) d\mu(x) = 1$$

logo

$$\left|\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\right| \leq \frac{v_{n-1}}{\delta} < \frac{C}{\delta} \tag{7.4}$$

onde C é uma constante. Temos então que $\{\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\}$ é uniformemente limitada em todo o conjunto compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus \{[b-a, b+a] \cup \operatorname{supp} \mu\}$ e portanto existe uma sua subsucessão que converge para uma função analítica L, i.e.

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Delta}} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = L(x).$$

Provemos que também se tem

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Delta}} \frac{p_n(x)}{p_{n+1}(x)} = L(x). \tag{7.5}$$

Considere-se para o efeito

$$D_k(x) = p_k^2(x) - \frac{v_k}{v_{k-1}} p_{k+1}(x) p_{k-1}(x).$$

Então aplicando três vezes a relação de recorrência a três termos (6.1) obtemos

$$D_k(x) = D_{k-1}(x) + p_k(x) \left(\frac{v_{k-1}^2 - v_{k-2}^2}{v_{k-1} v_{k-2}} p_{k-2}(x) + \frac{b_k - b_{k-1}}{v_{k-1}} p_{k-1}(x) \right)$$

Somando de N a n e tomando módulos nesta expressão vem

$$\begin{aligned} |D_n(x)| &= |D_{N-1}(x)| \\ &\quad + \sum_{k=N+2}^{n} |p_k(x)| \left(\frac{|v_{k-1}^2 - v_{k-2}^2|}{|v_{k-1} v_{k-2}|} |p_{k-2}(x)| + \frac{|b_k - b_{k-1}|}{|v_{k-1}|} |p_{k-1}(x)| \right) \end{aligned}$$

Mas de (7.4) $\left|\frac{p_k(x)}{p_n(x)}\right| \leq \left(\frac{C}{\delta}\right)^{n-k}$ logo a última expressão toma a forma

$$\left|\frac{D_n(x)}{p_n^2(x)}\right| \leq \left(\frac{C}{\delta}\right)^{2n-2N-2} \left(1 + \frac{v_{N-1}}{v_{N-2}}\right) + \sum_{k=N+2}^{n} A_k \left(\frac{C}{\delta}\right)^{2n-2k}$$

onde

$$A_k = \left(\frac{C}{\delta}\right)^2 \frac{|v_{k-1}^2 - v_{k-2}^2|}{|v_{k-1}v_{k-2}|} + \frac{C}{\delta}\frac{|b_k - b_{k-1}|}{|v_{k-1}|}.$$

Como $A_k \to 0$ quando $k \to \infty$ e podemos tomar k de forma que $\frac{C}{\delta} < 1$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n(x)}{p_n^2(x)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (7.5).$$

Agora multiplicando a equação (6.1) por $\frac{1}{p_n^2}$ e tomando limite quando $n \to \infty$ obtemos

$$L(x) = \frac{x - b \pm \sqrt{(x-b)^2 - a^2}}{a}$$

Mas $\left|\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}\right| \leq 1$ logo $|L(x)| < 1$ e portanto temos

$$L(x) = \frac{x - b - \sqrt{(x-b)^2 - a^2}}{a} = \frac{a}{x - b + \sqrt{(x-b)^2 - a^2}}$$

Do teorema de Stieltjes-Vitali se conclui que se tem (7.3).

Agora, L é analítica em $[b-a, b+a]$. Isto diz-nos que as raízes de p_n formam um conjunto denso de $[b-a, b+a]$, e portanto $[b-a, b+a] \subset \operatorname{supp}\mu$. Do Lema I.2 resulta que $\operatorname{supp}\mu = [b-a, b+a] \cup E^*$ com E^* enumerável com possíveis pontos de acumulação $b \pm a$. ■

OBSERVAÇÃO .

- A classe $M(a,b)$ foi considerada por Blumenthal em 1898. Este autor provou que as raízes de p_n são densas em $[b-a, b+a]$.
- Van Vleck estudou esta classe em 1904 para obter alguns resultados sobre convergência de fracções contínuas.

Este teorema é um caso particular do seguinte resultado devido a Poincaré (cf. [**109, 126**]).

TEOREMA 7.4 (Poincaré). *Seja (u_n) uma solução duma relação de recorrência de ordem m, i.e.*

$$\sum_{k=0}^{m} c_k(n) u_{n-k} = 0 \tag{7.6}$$

com $c_i(n)$ para $i = 0, \ldots, m$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} c_i(n) = c_i\,, \quad i = 0, \ldots, m$$

Sejam ξ_k as raízes do polinómio característico associado a (7.6), $\sum_{k=0}^{m} c_k z^k = 0$ e suponhamos $\xi_i \neq \xi_j$ para $i \neq j$ então existe ξ_k tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n-1}}{u_n} = \xi_k. \tag{7.7}$$

OBSERVAÇÃO .

- O teorema de Poincaré não especifica qual a raiz do polinómio característico que aparece no limite (7.7), nem o que é que acontece se $|\xi_i| = |\xi_j|$ para algum $i \neq j$.
- Perron provou que para todo a raiz ξ_k do polinómio característico existe uma solução v_k da relação de recorrência tal que $\frac{v_{n-1}}{v_n} \longrightarrow \xi_k$ quando $n \to \infty$.

O Teorema 7.3 mostra qual a raiz do polinómio característico que deve ser tomada e que a convergência é uniforme num compacto devidamente escolhido. Note que $[b-a, b+a]$ é a região onde as raízes do polinómio característico têm o mesmo módulo.

Vejamos como se comporta $\frac{p_{n-1}}{p_n}$ em $\operatorname{supp}\mu \setminus [b-a, b+a]$.

TEOREMA 7.5. *Sejam $\mu \in M(a,b)$ com $a > 0$ e $\{p_n\}$ a sucessão de polinómios ortonormais que lhe está associada. Se $x \in \operatorname{supp}\mu \setminus [b-a, b+a]$ então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \frac{x - b + \sqrt{(x-b)^2 - a^2}}{a}$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelo teorema de Poincaré sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = \frac{x - b \pm \sqrt{(x-b)^2 - a^2}}{a}$$

Agora, se $x \in \operatorname{supp}\mu \setminus [b-a, b+a]$ então $\mu\{x\} > 0$. Mas isto implica que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n^2(x) < \dfrac{1}{\mu\{x\}}$; e portanto $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n^2(x)$ é convergente, não se podendo ter $\lim_{n\to\infty} \dfrac{p_n^2(x)}{p_{n-1}^2(x)} > 1$. ■

OBSERVAÇÃO . Note que da comparação dos Teoremas 7.3 e 7.5 concluímos que o limite uniforme em K de $\frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}$ depende de K, i.e. este limite não coincide quando $K \subset \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu$ ou $K \subset \operatorname{supp}\mu \setminus [b-a, b+a]$.

O estudo realizado nesta secção será aplicado no decorrer deste trabalho.

CAPÍTULO II

Polinómios Ortogonais sobre a Circunferência

1. **Propriedades Algébricas** **31**

2. **Teorema Análogo de Favard** **34**

3. **Solução Geral duma Relação de Recorrência** **36**

4. **Propriedades das Raízes de $\{\phi_n\}$ quando $|a_n| < 1$** **38**

5. **Relação Entre as Duas Noções de Ortogonalidade Tratadas** **41**

6. **Exemplos** **45**

    6.1 **Polinómios de Bernstein-Szegő** **45**

    6.2 **Perturbação dos Polinómios de Jacobi** **47**

1. Propriedades Algébricas

Vamos construir, de forma análoga à realizada para a ortogonalidade sobre a recta real, a teoria dos polinómios ortogonais sobre a circunferência. O processo aqui descrito baseia-se no trabalho de Geronimus [**57**]. Mostraremos a equivalência existente entre estas duas noções de ortogonalidade. Esta equivalência vai-nos permitir estudar o comportamento assimptótico das sucessões de polinómios ortogonais mónicos de suporte compacto na recta real.

Comecemos por introduzir uma sucessão de números complexos, (c_n), sujeitos à seguinte condição dada em termos do determinante das *matrizes Toeplitz*

$$T_{n+1} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \dots & c_0 \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

convencionando-se $T_0 = 1$ e $c_{-k} = \bar{c}_k$; construamos a sucessão de polinómios mónicos $\{\phi_n\}$ como

$$\phi_n(z) = \frac{1}{T_n} \begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.1}$$

$$\phi_0(z) = 1\,. \tag{1.2}$$

TEOREMA 1.1. *Definamos a funcional linear* $\boldsymbol{c}$ *em* $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *por*

$$\langle \boldsymbol{c}, z^n \rangle = c_{-n}\,, \quad n \in \mathbb{Z};$$

então a sucessão de polinómios mónicos $\{\phi_n\}$ *definida por* (1.2) *é ortogonal relativamente a* $\boldsymbol{c}$*, i.e.*

$$(\phi_n, \phi_m)_{\boldsymbol{c}} = \langle \boldsymbol{c}, \phi_n(z)\bar{\phi}_m(1/z) \rangle = \frac{T_{n+1}}{T_n}\delta_{n,m}\,, \quad n, m \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que para $m < n$

$$\langle \boldsymbol{c}, \phi_n(z)\frac{1}{z^m}\rangle = \frac{1}{T_n}\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \dots & c_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_{-1} \\ c_m & c_{m-1} & \dots & c_{m-n} \end{vmatrix}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

e quando $n = m$ temos directamente (1.3). ■

O produto pelo operador z sobre $\mathbb{T}$ que aqui definimos é uma forma unitária, enquanto que o produto pelo operador z sobre a recta real era simplesmente simétrico. Daí que nos apareçam determinantes de matrizes Toeplitz onde antes nos apareciam determinantes de matrizes de Hankel.

Uma condição necessária e suficiente para que $\boldsymbol{c}$ seja definida positiva é que $T_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Podemos enunciar:

TEOREMA 1.2 (Problema Trigonométrico de Momentos). *Se (c_n) é uma sucessão de elementos em $\mathbb{C}$ tal que $T_{n+1} = |c_{i-j}|_{i,j=0}^n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, então existe uma medida de Borel positiva σ tal que*

$$\langle \boldsymbol{c}, z^n\rangle = \int_0^{2\pi} \exp(-in\theta) d\sigma(\theta)\,, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, $\{\phi_n\}$ associado a (c_n) será ortogonal a respeito de σ, i.e.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_n(e^{i\theta})\overline{\phi_m(e^{i\theta})} d\sigma(\theta) = h_n \delta_{n,m}\,, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

onde $h_n = \frac{T_{n+1}}{T_n} > 0$.

Deduzamos agora a relação de recorrência que estes polinómios verificam. Introduzamos uma sucessão de números complexos (a_n) a que chamaremos *parâmetros de reflexão* como sendo os coeficientes da expansão em série de potências de $\{\phi_n\}$ da função $\frac{1}{z}$, i.e.

$$\frac{1}{z} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \phi_n(z)$$

Então,

$$a_n h_n = \langle \boldsymbol{c}, \frac{1}{z}\bar{\phi}_n(1/z)\rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{T_n}{T_{n+1}}\overline{\langle \boldsymbol{c}, z\phi_n(z)\rangle} = \frac{1}{T_{n+1}}\overline{\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & \dots & c_{-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_{-1} \\ c_{-1} & c_{-2} & \dots & c_{-n-1} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{(-1)^n}{T_{n+1}}\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1-n} & c_{2-n} & \dots & c_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Considere-se agora

$$\frac{\phi_n(z) - z^n}{z^{n-1}} = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j,n}\bar{\phi}_j(1/z)$$

onde

$$\begin{aligned} &a_{j,n}h_j \\ &\quad = \langle \boldsymbol{c}, \frac{\phi_n(z)\phi_j(z)}{z^{n-1}}\rangle - \langle \boldsymbol{c}, z\phi_j(z)\rangle \\ &\quad = \langle \boldsymbol{c}, \left(z + c_1 + \frac{c_2}{z} + \dots \frac{c_n}{z^{n-1}}\right)\phi_j(z)\rangle - \bar{a}_j h_j \\ &\quad = -\bar{a}_j h_j \end{aligned}$$

Logo

$$\phi_n(z) = z^n - z^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\bar{a}_j\bar{\phi}_j(1/z)$$

então

$$\phi_n(z) = z\left(z^{n-1} - z^{n-2}\sum_{j=0}^{n-2}\bar{a}_j\bar{\phi}_j(1/z)\right) - \bar{a}_{n-1}z^{n-1}\bar{\phi}_{n-1}(1/z)$$

ou ainda

$$\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) - \bar{a}_{n-1}\phi^\star_{n-1}(z)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

onde $\phi^\star_{n-1}(z) = z^{n-1}\bar{\phi}_{n-1}(1/z)$, $n \in \mathbb{N}$. Tomando conjugado em (1.4) vem

$$\bar{\phi}_n(1/z) = \frac{1}{z}\bar{\phi}_{n-1}(1/z) - a_{n-1}\frac{1}{z^{n-1}}\phi_{n-1}(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

e multiplicando por z^n obtemos finalmente

$$\phi^\star_n(z) = \phi^\star_{n-1}(z) - a_{n-1}z\phi_{n-1}(z)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

Agora, se substituirmos em (1.5) a expressão de $\phi^\star_n(z)$ dada em (1.4) obtemos a seguinte relação de recorrência a três termos satisfeita pelos polinómios ortogonais sobre $\mathbb{T}$

$$\bar{a}_n\phi_{n+2}(z) = (\bar{a}_n z + \bar{a}_{n+1})\phi_{n+1}(z) - z\bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)\phi_n(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\phi_0(z) = 1 \tag{1.6}$$

Temos então:

TEOREMA 1.3. *Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ associada à funcional linear* $\boldsymbol{c}$*; então $\{\phi_n\}$ verifica* (1.4)*,* (1.5) *e* (1.6)*.*

2. Teorema Análogo de Favard

Antes de estabelecer em que condições temos o recíproco do Teorema 1.3 vamos relacionar a_n com os determinantes T_n.

TEOREMA 2.1. *Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ associada à funcional linear* $\boldsymbol{c}$*. Se $|a_n| \neq 0$ então*

$$|a_n|^2 = 1 - \frac{T_{n+2}}{T_{n+1}}\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

$$h_{n+1} = c_0 \prod_{j=0}^{n} (1-|a_j|^2)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

DEMONSTRAÇÃO. Multiplicando (1.6) por $z^{-(n+1)}$ e aplicando $\boldsymbol{c}$ obtemos

$$\bar{a}_{n+1}h_{n+1} - \bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)h_n = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Agora se $|a_n| \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ então tendo em atenção que $h_n = \frac{T_{n+1}}{T_n}$ obtemos (2.1) e (2.2). ■

Vamos dar de seguida um critério para a regularidade de uma funcional linear associada a uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos.

COROLÁRIO II.1. *Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ associada à funcional linear* $\boldsymbol{c}$*. Então:*

- *$T_n \neq 0$ é equivalente a $|a_n| \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.*
- *$T_n > 0$ é equivalente a $|a_n| < 1$, $n \in \mathbb{N}$.*

OBSERVAÇÃO . Assim, dizemos que $\boldsymbol{c}$ é uma *funcional linear regular* se $|a_n| \neq 1$ e é *definida positiva* se $|a_n| < 1$.

Estamos em condições de enunciar um análogo do Teorema de Favard para os polinómios ortogonais sobre $\mathbb{T}$.

TEOREMA 2.2. *Seja* $\{\phi_n\}$ *uma sucessão de polinómios mónicos verificando uma das relações de recorrência* (1.4), (1.5) *ou* (1.6) *com* $|a_n| \neq 0$*; então* $\{\phi_n\}$ *é ortogonal relativamente à funcional linear* $\boldsymbol{c}$ *associada à sucessão de momentos* (c_n) *definida por*

$$(-1)^n a_n = \frac{1}{T_{n+1}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1-n} & c_{2-n} & \dots & c_1 \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Procedamos por indução. Suponhamos que se tem por hipótese

$$\langle \boldsymbol{c}, \phi_n(z)\frac{1}{z^l}\rangle = 0\,, \quad 0 \leq l \leq n$$

então tendo em atenção (1.4)

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{c}, \phi_{n+1}(z)\frac{1}{z^{l+1}}\rangle \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{c}, \phi_n(z)\frac{1}{z^l}\rangle - \bar{a}_n\langle \boldsymbol{c}, \phi_n^\star(z)\frac{1}{z^{l+1}}\rangle \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{c}, \phi_n(z)\frac{1}{z^l}\rangle - \bar{a}_n\langle \boldsymbol{c}, \frac{1}{z^{l+1-n}}\bar{\phi}_n(1/z)\rangle \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{c}, \phi_n(z)\frac{1}{z^l}\rangle - \bar{a}_n\overline{\langle \boldsymbol{c}, \frac{1}{z^{n-l-1}}\phi_n(z)\rangle} \\
&\qquad = \begin{cases} 0 & , \quad l < n \\ h_n(1-|a_n|^2) & , \quad l = n \end{cases}
\end{aligned}$$

Verifiquemos agora que se tem

$$\langle \boldsymbol{c}, \phi_{n+1}(z)\rangle = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mais uma vez por (1.4)

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{c}, z\phi_n(z)\rangle - \bar{a}_n\langle \boldsymbol{c}, \phi_n^\star(z)\rangle \\
&\qquad = \bar{a}_n h_n - \bar{a}_n\langle \boldsymbol{c}, z^n\bar{\phi}_n(1/z)\rangle \\
&\qquad = 0
\end{aligned}$$

A unicidade desta sucessão de polinómios ortogonais mónicos sai directamente do facto de se

$$\phi_{n+1}(z) = z\phi_n(z) - \bar{a}_n\psi_n(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

então $\psi_n(z) = \phi_n^\star(z)$ para $n \in \mathbb{N}$. ∎

OBSERVAÇÃO . Uma demonstração alternativa deste resultado foi dada por Erdelyi et al. em [**42**].

3. Solução Geral duma Relação de Recorrência

Vejamos que a função de Caratheodory da medida de Borel positiva μ, também chamada de Transformada de Riesz-Herglotz

$$F(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \tag{3.1}$$

no caso complexo, joga o mesmo papel da transformada de Stieltjes, no caso real.

DEFINIÇÃO 3.1. Seja $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. A sucessão de polinómios mónicos $\{\Omega_n\}$ definida à custa de $\{\phi_n\}$ por

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{c_0} \left\langle \boldsymbol{c_y}, \frac{z+y}{z-y}(\phi_n(z) - \phi_n(y)) \right\rangle \tag{3.2}$$

é chamada *sucessão de polinómios ortogonais associados de primeira espécie* .

Pode ver-se que estes polinómios são ainda uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos e verificam a mesma relação de recorrência a três termos.

TEOREMA 3.1. *Seja* $\{\phi_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos verificando* (1.4)*. Então a sucessão de polinómios mónicos associada de primeira espécie,* $\{\Omega_n\}$*, verifica as seguintes relações de recorrência*

$$\Omega_{n+1}(z) = z\Omega_n(z) + \bar{a}_n \Omega_n^\star(z)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$
$$\Omega_{n+1}^\star(z) = \Omega_n^\star(z) + a_n z \Omega_n(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\bar{a}_n \Omega_{n+2}(z) = (\bar{a}_n z + \bar{a}_{n+1})\Omega_{n+1}(z) - z\bar{a}_{n+1}(1 - |a_n|^2)\Omega_n(z)\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vimos já que se $\{\phi_n\}$ verifica (1.4) então também verifica (1.6). Então, reescrevamo-la com y no lugar de z, i.e.

$$\bar{a}_n \phi_{n+2}(y) = (\bar{a}_n y + \bar{a}_{n+1})\phi_{n+1}(y) - y\bar{a}_{n+1}(1 - |a_n|^2)\phi_n(y)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Subtraindo de (1.6) esta última equação, multiplicando seguidamente por $\frac{z+y}{z-y}$ e aplicando $\boldsymbol{c}$, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{a}_n\Omega_{n+1}(z) &= \bar{a}_{n+1}\Omega_n(z) + \frac{\bar{a}_n}{c_0}\left\langle \boldsymbol{c_y}, \frac{z+y}{z-y}(z\phi_{n+1}(z) - y\phi_{n+1}(y))\right\rangle \\ &\quad - \frac{\bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)}{c_0}\left\langle \boldsymbol{c_y}, \frac{z+y}{z-y}(z\phi_n(z) - y\phi_n(y))\right\rangle, \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.4)\end{aligned}$$

Mas

$$z\phi_{n+1}(z) - y\phi_{n+1}(y) = (z-y)\phi_{n+1}(y) + z(\phi_{n+1}(z) - \phi_{n+1}(y))$$

então de (3.4) sai que

$$\begin{aligned}\bar{a}_n\Omega_{n+2}(z) &= (\bar{a}_{n+1} + \bar{a}_n z)\Omega_{n+1}(z) - z\bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)\Omega_n(z) \\ &\quad + \frac{1}{c_0}\left\langle \boldsymbol{c_y}, (z+y)(\bar{a}_n\phi_{n+1}(y) - \bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)\phi_n(y)\right\rangle, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\bar{a}_n\Omega_{n+2}(z) &= (\bar{a}_{n+1} + \bar{a}_n z)\Omega_{n+1}(z) + -z\bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)\Omega_n(z) \\ &\quad + \frac{\overline{a_n a_{n+1}}}{c_0}(h_{n+1} - (1-|a_n|^2)h_n), \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

e aplicando (2.2) temos a relação de recorrência a três termos que pretendíamos obter.

As demais relações saiem directamente por raciocínios análogos. ∎

Estamos em condições de determinar a solução geral de uma dada relação de recorrência a três termos do tipo (1.6), i.e.

$$\begin{aligned}&\bar{a}_n\Lambda_{n+2}(z) = (\bar{a}_n z + \bar{a}_{n+1})\Lambda_{n+1}(z) - z\bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)\Lambda_n(z), \quad n \in \mathbb{N} \\ &\frac{\Lambda_1(z)}{\Lambda_0(z)} = z - a \quad \text{com} \quad |a| < 1\end{aligned} \quad (3.5)$$

TEOREMA 3.2. *Seja* $\{\phi_n(.;\lambda)\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos que verifica*

$$\phi_{n+1}(z;\lambda) = z\phi_n(z;\lambda) - \overline{\lambda a_n}\phi_n^\star(z;\lambda), \quad n \in \mathbb{N};$$

então, $\{\phi_n(.;\lambda)\}$ *é a solução geral de* (3.5) *se e somente se* $|\lambda| = 1$.
Além disso,

$$\phi_{n+1}(z;\lambda) = \frac{1+\bar{\lambda}}{2}\phi_{n+1}(z) + \frac{1-\bar{\lambda}}{2}\Omega_{n+1}(z), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

DEMONSTRAÇÃO. Vê-se facilmente que $\{\phi_n(.;\lambda)\}$ verifica

$$\phi^\star_{n+1}(z;\lambda) = \phi^\star_n(z;\lambda) - \lambda a_n z\phi_n(z;\lambda)\,, \quad n \in \mathbb{N};$$

e daqui, seguindo o processo descrito na demonstração do Teorema 1.3 obtemos

$$\overline{\lambda a_n}\phi_{n+2}(z;\lambda) = \bar{\lambda}(\bar{a}_n z + \bar{a}_{n+1})\phi_{n+1}(z;\lambda) - z\overline{\lambda a_{n+1}}(1 - |\lambda a_n|^2)\phi_n(z;\lambda)$$

para $n \in \mathbb{N}$. Logo temos (3.5) quando e só quando $|\lambda| = 1$.

A representação (3.6) para $\{\phi_n(.,\lambda)\}$ resulta de $\{\phi_{n+1}\}$ e $\{\Omega_{n+1}\}$ serem duas soluções independentes de (3.5), pois neste caso existem constantes A, B tais que

$$\phi_n(z;\lambda) = A\phi_n(z) + B\Omega_n(z) \tag{3.7}$$

Temos somente que calcular A e B. Para tal note que $\phi_1(0) = -\Omega_1(0)$ e portanto, tomando $n = 0, 1$ em (3.7) obtemos

$$A + B = 1, \qquad A - B = \overline{\lambda}.$$

E daqui se conclui que $A = \frac{1+\overline{\lambda}}{2}$ e $B = \frac{1-\overline{\lambda}}{2}$. ■

Seguindo as mesmas técnicas aqui apresentadas pode ver-se que por $\{\phi_n\}$ e $\{\Omega_n\}$ verificarem (3.5) se tem que

$$u_{n+2}(z) = \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}z\right)u_{n+1} - \frac{a_{n+1}}{a_n}z(1 - |a_n|^2)u_n \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

é satisfeita por $\{\phi^*_n\}$ e $\{\Omega^*_n\}$.

4. Propriedades das Raízes de $\{\phi_n\}$ Quando $|a_n| < 1$

Os resultados de interlaçamentos das raízes dos polinómios ortogonais com suporte na recta real não se vão poder ter aqui porque não existe um Teorema do Valor Médio para funções de variável complexa. Mantem-se, no entanto, válido o Teorema de Fejér sobre a localização das raízes (cf. Teorema I.6.2).

Como segundo objectivo para esta secção temos o de dar um algoritmo para a partir de um polinómio mónico de grau n com raízes em $|z| < 1$ construir uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos e determinar univocamente a sucessão dos parâmetros de reflexão (a_n) com $|a_n| < 1$. Vamos necessitar para isso do seguinte resultado [**32**, Th. 3, pp. 193]:

TEOREMA 4.1 (Rouché). *Sejam f e g duas funções analíticas num domínio fechado G de fronteira contínua ∂G. Se*

$$|f(z)| > |g(z)|\,, \quad z \in \partial G$$

então as funções f e $f+g$ possuem o mesmo número de raízes em G.

Estamos agora em condições de começar o estudo sobre as raízes dos polinómios ortogonais.

TEOREMA 4.2. *Sejam $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ e (a_n) a sucessão dos parâmetros de reflexão associada. Então:*

(a) $|a_n| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \phi_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)$ *com* $|z_j| < 1$.

(b) $0 < |a_n| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \phi_n$ *e* ϕ_{n+1} *não têm raízes em comum.*

(c) $|a_n| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \phi_{n+1}(z)$ *tem raízes simples e estas encontram-se sobre* $\mathbb{T}$.

DEMONSTRAÇÃO. (a). Como $|a_0| < 1$ temos que $P_1(z) = z - a_0$ tem raízes em $|z| < 1$. Procedamos por indução tomando como hipótese:

H: $\{\phi_k\}_{k=0}^{s}$ tem as suas raízes em $|z| < 1$.

Então, como $\phi_{s+1}^\star(z) - \phi_s^\star(z) = -za_s\phi_s(z)$ temos
$$\left|\frac{\phi_{s+1}^\star(z) - \phi_s^\star(z)}{\phi_s^\star(z)}\right| = \left|za_s\frac{\phi_s(z)}{\phi_s^\star(z)}\right|$$
Mas $\phi_n^\star(z) = \prod_{j=1}^{n}(1 - z\bar{z}_j)$ logo se $|z| < 1$, então $|\phi_n^\star(z)| > |\phi_n(z)|$. Assim
$$\left|\frac{\phi_{s+1}^\star(z) - \phi_s^\star(z)}{\phi_s^\star(z)}\right| < 1$$
Agora pelo Teorema de Rouché concluímos que

$$(\phi_{s+1}^\star(z) - \phi_s^\star(z)) + \phi_s^\star(z) \quad \text{e} \quad \phi_s^\star(z)$$

têm o mesmo número de raízes em $|z| < 1$. Mas, $\phi_s^\star$ não tem raízes em $|z| < 1$. Logo as raízes de ϕ_{s+1} estão em $|z| \leq 1$. Se elas se encontrassem sobre $\mathbb{T}$ então $\phi_{s+1}^\star(e^{i\theta}) = 0$ para algum $\theta \in [0, 2\pi[$; e, portanto, $|a_s| = \left|\frac{\phi_s^\star(e^{i\theta})}{\phi_s(e^{i\theta})}\right| = 1$, o que é absurdo.

(b). Suponhamos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ com $|z_0| < 1$ tal que $\phi_n(z_0) = \phi_{n+1}(z_0) = 0$; então

$$\phi_{n+1}(z_0) = z_0\phi_n(z_0) - \bar{a}_n\phi_n^\star(z_0)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

donde se conclui que $\bar{a}_n\phi_n^\star(z_0) = 0$. Mas $\phi_n^\star(z_0) \neq 0$ pois $|z_0| < 1$, então $a_n = 0$, em contradição com a hipótese.

(c). Sejam $|a_n| = 1$ e ϕ_n verificando (1.4). Se $e^{i\alpha}$ for raiz de ϕ_n então de (1.4) com $z = e^{i\alpha}$ temos que $\phi_{n+1}(e^{i\alpha}) = 0$. Assim, as raízes de ϕ_n em $\mathbb{T}$ são também raízes de ϕ_{n+1}.

Tomemos agora a equação (1.4) com $z = e^{i\theta}$ e $a_n = e^{i\beta}$, i.e

$$\phi_{n+1}(e^{i\theta}) = e^{i\theta}\phi_n(e^{i\theta}) - e^{i\beta}e^{-in\theta}\bar{\phi}_n(e^{-i\theta}), \quad n \in \mathbb{N}$$

e considere-se $\phi_n(e^{i\theta}) = re^{i\psi}$ então

$$\begin{aligned}\phi_{n+1}(e^{i\theta}) &= re^{i(\theta+\psi)} - re^{i(\beta-n\theta+\psi)} \\ &= 2re^{i(\frac{n+1}{2}\theta-\frac{\beta}{2})}\cos(\psi + \frac{\beta}{2} - \frac{n-1}{2}\theta)\end{aligned}$$

Assim,

$$\phi_{n+1}(e^{i\theta}) = 0 \text{ se e somente se } \psi + \tfrac{\beta}{2} - \tfrac{n-1}{2}\theta = k\tfrac{\pi}{2} \text{ para } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Daqui se conclui que ϕ_n tem n raízes distintas sobre $\mathbb{T}$. ■

OBSERVAÇÃO . Pode provar-se que se uma raiz de ϕ_{n+1} está em $\mathbb{T}$ então todas as suas raízes se lá encontram. De facto, se $e^{i\theta}$ for tal que $\phi_{n+1}(e^{i\theta}) = 0$ e $\phi_n(e^{i\theta}) \neq 0$ então $a_n = \frac{e^{i\theta}\phi_n(e^{i\theta})}{\phi_n^\star(e^{i\theta})}$. Logo, $|a_n| = 1$ e portanto da alínea (c) do Teorema anterior temos o que queríamos demonstrar.

Estamos em condições de demonstrar o resultado principal desta secção.

TEOREMA 4.3. *Seja ϕ_n um polinómio de grau n com todas as suas raízes em $|z| < 1$; então podemos construir uma família de polinómios $\{\phi_k\}_{k=0}^n$ ortogonais sobre $\mathbb{T}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Escrevamos

$$\phi_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j) \tag{4.1}$$

De (4.1) sai que $|a_{n-1}| = \prod_{j=1}^n |z_j|$. Logo $|a_{n-1}| < 1$.

Definimos ϕ_{n-1} por

$$z\phi_{n-1}(z) = \frac{\phi_n(z) + \bar{a}_{n-1}\phi_n^\star(z)}{1 - |a_{n-1}|^2}$$

e tomando $\star$

$$(1-|a_{n-1}|^2)\phi^\star_{n-1}(z)=\phi^\star_n(z)+a_{n-1}\phi_n(z)$$

Donde se conclui para $|z|<1$

$$\left|\frac{(1-|a_{n-1}|^2)\phi^\star_{n-1}(z)-\phi^\star_n(z)}{\phi^\star_n(z)}\right|<\left|a_{n-1}\frac{\phi_n(z)}{\phi^\star_n(z)}\right|<1$$

Pelo Teorema de Rouché, as raízes de $\phi^\star_{n-1}$ estão em $|z|\geq 1$. Agora, se $e^{i\theta}$ for raiz de $\phi^\star_{n-1}$ então $\phi_{n-1}(e^{i\theta})=0$ e portanto, da observação anterior segue que $\phi_n(e^{i\theta})=0$ (o que é impossível). Então $|\phi_{n-1}(0)|<1$ e aplicando sucessivamente este processo obtemos a família desejado de polinómios ortogonais. Além disso, pode ver-se que a medida de ortogonalidade correspondente é $\frac{d\theta}{|\phi_n(e^{i\theta})|^2}$ (cf. Freud [**47**]). ■

OBSERVAÇÃO . Note-se que no caso da ortogonalidade sobre $\mathbb{R}$, para gerar a sucessão de polinómios ortogonais mónicos necessitavamos dois polinómios com raízes interlaçadas (cf. Wendroff [**150**]) enquanto que aqui somente necessitamos de um polinómio com raízes no interior da circunferência unitária.

5. Relação Entre as Duas Noções de Ortogonalidade Tratadas

Seja μ uma medida de Borel positiva no intervalo $[-1,1]$; então, vimos já que existe uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos que lhe está associada, i.e.

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)d\mu(x)=\kappa_n\delta_{n,m}\,,\quad n,m\in\mathbb{N}\quad\text{e}\quad\kappa_n>0.$$

À custa de μ podemos definir uma medida ν sobre $[0,2\pi[$ por

$$d\nu(\theta)=\tfrac{1}{2}|\sin\theta|d\mu(\cos\theta)$$

e se μ for *absolutamente contínua*, i.e. existe w não decrescente e positiva tal que $d\mu(x)=w(x)dx$, então

$$d\nu(\theta)=\tfrac{1}{2}w(\cos\theta)|\sin\theta|d\theta.$$

A v podemos então associar-lhe uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, $\{\phi_n\}$, sobre $\mathbb{T}$ por

$$\int_0^{2\pi}\phi_n(z)\bar{\phi}_m(1/z)d\nu(\theta)=h_n\delta_{n,m}\,,\quad n,m\in\mathbb{N}\quad\text{e}\quad h_n>0.$$

Vejamos como estão relacionadas estas duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos (cf. [**57, 143, 149**]).

TEOREMA 5.1. *Sejam $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ e $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a ν; então:*

- *Os coeficientes de ϕ_n são reais.*
- *Se denotarmos por $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ então*

$$P_n(x) = \frac{\phi_{2n}(z) + \phi^\star_{2n}(z)}{2^n z^n (1 + \phi_{2n}(0))}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Os coeficientes de ϕ_n são reais pois a medida ν é simétrica.

Antes de prosseguirmos relembremos a definição dos polinómios de Tchebychev de primeira espécie

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \text{com} \quad x = \cos\theta \quad \text{e} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Agora, se $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ obtemos

$$T_n(x) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Considere-se que

$$\phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} d_{k,n} z^k$$

então

$$z^{-n}(\phi_{2n}(z) + \phi^\star_{2n}(z)) = \sum_{k=0}^{2n} d_{k,2n}(z^{k-n} + z^{n-k}) = 2\sum_{k=0}^{2n} d_{k,2n} T_{|n-k|}(z)$$

Desta representação para $z^{-n}(\phi_{2n}(z) + \phi^\star_{2n}(z))$ resulta que este polinómio é de grau n. Além disso, como o coeficiente de maior ordem de T_n é 2^{n-1} obtemos para coeficiente de maior ordem deste novo polinómio $2^n(1 + \phi_{2n}(0))$.

Provemos que $z^{-n}(\phi_{2n}(z)+\phi^\star_{2n}(z))$ é ortogonal relativamente à medida μ:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} & z^{-n}(\phi_{2n}(z)+\phi^\star_{2n}(z))T_k(x)d\mu(x) \\
&= \int_0^{2\pi}(z^{-n}\phi_{2n}(z)+z^n\overline{\phi_{2n}(z)})z^k d\nu(\theta) \\
&= \int_0^{2\pi}\phi_{2n}(z)z^{-n+k}d\nu(\theta)+\int_0^{2\pi}z^{n+k}\overline{\phi_{2n}(z)}d\nu(\theta) \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0\le k<n \\ \int_0^{2\pi}\overline{\phi_{2n}(z)}z^{2n}d\nu(\theta) & , \quad k=n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad 0\le k<n \\ h_{2n} & , \quad k=n \end{cases} \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Daqui se conclui que P_n é o polinómio definido por (5.1). ■

OBSERVAÇÃO . Pode ver-se que

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)d\mu(x)=\frac{2h_{2n}}{2^n(1+\phi_{2n}(0))}$$

Tratemos de relacionar os coeficientes da relação de recorrência a três termos satisfeita pelos $\{P_n\}$, (I.2.5), com os parâmetros de reflexão de $\{\phi_n\}$. Note-se que $\bar{a}_{n-1}=-\phi_n(0)$.

TEOREMA 5.2. *Sejam $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ e $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a ν com $d\nu(\theta)=\frac{1}{2}|\sin\theta|d\mu(\cos\theta)$; então:*

$$4\gamma_{n+1} = (1-\phi_{2n+2}(0))(1-\phi^2_{2n+1}(0))(1+\phi_{2n}(0)) \qquad (5.3)$$

$$2\beta_n = \phi_{2n-1}(0)(1-\phi_{2n}(0))-\phi_{2n+1}(0)(1+\phi_{2n}(0)) \qquad (5.4)$$

Reciprocamente, se denotarmos por $R_n(x)=\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$, temos

$$\phi_{2n}(0) = R_n(1)-R_n(-1)-1 \qquad (5.5)$$

$$\phi_{2n+1}(0) = \frac{R_n(1)+R_n(-1)}{R_n(1)-R_n(-1)} \qquad (5.6)$$

DEMONSTRAÇÃO. De (I.2.5) sai directamente que

$$\gamma_{n+1}=\frac{\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)T_{n+1}(x)d\mu(x)}{2\int_{-1}^{1}P_n(x)T_n(x)d\mu(x)}, \quad n\in\mathbb{N}. \qquad (5.7)$$

Tomando em consideração (5.2) calculemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} & P_n(x)T_n(x)d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2^n(1+\phi_{2n}(0))}\int_{-1}^{1}\frac{\phi_{2n}(z)+\phi^\star_{2n}(z)}{z^n}T_n(x)d\mu(x) \\ &= \frac{1}{2^n(1+\phi_{2n}(0))}\int_{0}^{2\pi} z^{2n}\overline{\phi_{2n}(z)}d\nu(\theta) \\ &= \frac{2\pi h_{2n}}{2^n(1+\phi_{2n}(0))}\end{aligned}$$

De (5.7) e tendo em atenção (2.2) obtemos (5.3).

Relembre-se que

$$\phi_n(z) = \sum_{j=0}^{n} d_{j,n}z^j\,, \quad d_{n,n} = 1$$

Então de (1.4) obtemos

$$d_{2n-1,2n} = d_{2n-2,2n-1} + \phi_{2n}(0)\phi_{2n-1}(0) \text{ com } 2n \text{ em vez de } n \tag{5.8}$$

$$d_{2n,2n+1} = d_{2n-1,2n} + \phi_{2n+1}(0)\phi_{2n}(0) \text{ com } 2n+1 \text{ em vez de } n \tag{5.9}$$

Mas adicionando termo a termo (1.4) e (1.5) obtemos

$$\phi_{2n}(z) + \phi^\star_{2n}(z) = (1+\phi_{2n}(0))(z\phi_{2n-1}(z) + \phi^\star_{2n-1}(z))$$

e portanto

$$P_n(x) = \frac{z\phi_{2n-1}(z) + \phi^\star_{2n-1}(z)}{2^n z^n}$$

Assim, desta igualdade e como $\{T_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos *simétrica*, i.e. o correspondente $\beta_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k = \frac{d_{2n-2,2n-1} + \phi_{2n-1}(0)}{2} \tag{5.10}$$

Temos então que

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n}\beta_k - \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k \frac{-d_{2n,2n+1} + d_{2n-2,2n-1} - \phi_{2n+1}(0) + \phi_{2n-1}(0)}{2}$$

e de (5.8) e (5.9) obtemos (5.4).

Da representação (5.1) resulta facilmente

$$P_n(1) = \frac{\phi_{2n}(1)}{2^{n-1}(1+\phi_{2n}(0))}$$

$$P_n(-1) = \frac{(-1)^n\phi_{2n}(-1)}{2^{n-1}(1+\phi_{2n}(0))}$$

De (1.4) com $z = 1$ e $z = -1$ obtemos

$$\phi_{n+1}(1) = (1 + \phi_{n+1}(0))\phi_n(1)$$

$$\phi_{n+1}(-1) = (-1)^n(1 + \phi_{n+1}(0))\phi_n(-1)$$

Donde se conclui que

$$R_n(1) = \frac{(1 + \phi_{2n}(0))(1 + \phi_{2n+1}(0))}{2}$$

$$R_n(-1) = -\frac{(1 + \phi_{2n}(0))(1 - \phi_{2n+1}(0))}{2}$$

Adicionando membro a membro estas duas equações obtemos (5.5) e subtraindo membro a membro as mesmas equações obtemos (5.6). ■

OBSERVAÇÃO . O problema recíproco ao aqui tratado, i.e. partindo do conhecimento dos coeficientes da relação de recorrência a três termos (β_n), (γ_n) obter a sucessão dos parâmetros de reflexão $(\phi_n(0))$, é ligeiramente mais complicado pois nem sempre se conhece uma representação para P_n e portanto não podemos calcular R_n.

6. Exemplos

6.1. Polinómios de Bernstein-Szegő. Apresentemos um resultado da teoria da aproximação que pode ser encontrado em [**2**].

TEOREMA 6.1 (Fejér-Riesz). *Seja*

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikt}$$

tal que $f_n(x) \geq 0$. Então existe um único polinómio trigonométrico g_n de grau n, cujas raízes não estão no interior do círculo unitário, $|g_n(0)| > 0$ e tal que $f_n(x) = |g_n(x)|^2$ para $x \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO. Tome-se

$$\begin{aligned} 2\cos(n\theta) &= z^n + z^{-n} \\ 2i\sin(n\theta) &= z^n - z^{-n} \end{aligned}$$

com $z = e^{i\theta}$. Assim,

$$f_n(\theta) = z^{-n}G_{2n}(z)$$

com

$$G_{2n}(z) = A_0 z^n + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} A_j (z^{n+j} + z^{n-j}) + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n} A_j (z^{n+j} - z^{n-j})$$

Facilmente se vê que $G_{2n}(z) = G^*_{2n}(z)$; além disso, se z_l é uma raiz de G_{2n} então $1/\bar{z}_l$ também o é, e portanto

$$G_{2n}(z) = c\prod(z - z_l)(z - 1/\bar{z}_l)\prod(z - \xi_l)^2$$

onde z_l são tais que $|z_l| > 1$ e ξ_l têm módulo 1 com multiplicidade par, por ser f_n um polinómio trigonométrico. Assim,

$$f_n(\theta) = |g_n(z)|^2$$

onde

$$g_n(z) = \sqrt{|c|}\prod(z - z_l)\prod(z - \xi_l)$$

Como queríamos demonstrar. ■

Suponhamos que ν é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue e que a sua derivada Radon-Nikodym

$$\frac{d\nu(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2\pi q_k(\theta)} \quad \text{com} \quad q_k(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{k}(a_j\cos(j\theta) + b_j\sin(j\theta))$$

Então do Teorema de Fejér-Riesz sabemos existir um único polinómio de grau k, Q_k, cujas raízes não estão no interior do disco unitário, $Q_k(0) > 0$ e tal que $q_k(\theta) = |Q_k(e^{i\theta})|^2$.

Provemos agora que os polinómios

$$\varphi_n(z) = z^{n-k}Q^*_k(z)\,, \quad n \geq k \tag{6.1}$$

são ortonormais relativamente a ν:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\varphi_n(z)\overline{r_m(z)}d\nu(\theta)\\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_{\odot}\frac{z^{n-k}Q^*_k(z)\bar{r}_m(1/z)}{Q_k(z)z^{-k}Q^*_k(z)}\frac{dz}{iz}\\
&\qquad = \frac{1}{2\pi i}\int_{\odot}\frac{z^{n-1}\bar{r}_m(1/z)}{Q_k(z)}dz\\
&\qquad = 0\,, \quad 0 \leq m < n \quad \text{pelo Teorema de Cauchy}
\end{aligned}$$

e

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_n(z)|^2 d\nu(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{Q_k^*(z)}{Q_k^*(z)}\right|^2 d\theta = 1$$

A sucessão de polinómios ortonormais $\{\varphi_n\}$ definida por (6.1) são chamados de *Bernstein-Szegő*.

Estas são as primeiras famílias de polinómios ortogonais associadas a modificações racionais de uma medida de Borel dada.

No decorrer deste trabalho, utilizaremos estas famílias de polinómios ortogonais, obtendo à custa delas propriedades interessantes para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos que estão associadas a medidas que são modificações racionais de uma dada medida mais uma soma finita de deltas de Dirac.

6.2. Perturbação dos Polinómios de Jacobi. Vejamos como proceder para obter os parâmetros de reflexão duma sucessão de polinómios ortogonais mónicos$\{\phi_n\}$ sobre $\mathbb{T}$ quando partimos dos coeficientes da relação de recorrência a três termos da sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ sobre $\mathbb{R}$.

Neste caso vamos considerar as sucessões de polinómios mónicos $\{\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}\}$ ortogonais relativamente à medida $\tilde{\mu}$ definida por

$$d\tilde{\mu}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + M_1\delta_{-1} + M_2\delta_1,$$

i.e. $\tilde{\mu}$ é uma perturbação da medida de Jacobi (cf. Tabela 1) pelas massas M_1 e M_2 em -1 e 1, respectivamente.

O caso $\alpha = \beta = 0$ foi estudado por Marcellán, García-Lázaro e Tasis em [**51**].

Vamos necessitar das seguintes relações válidas para os polinómios mónicos de Jacobi de parâmetros α, β:

$$P_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(x) \tag{6.2}$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = 2^n \binom{n+\alpha}{n}\binom{2n+2\alpha}{n}^{-1} \tag{6.3}$$

$$\frac{dP_n^{\alpha,\beta}(x)}{dx} = nP_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) \tag{6.4}$$

$$\|P_n^{\alpha,\beta}\|^2 = \frac{2^{2(\alpha-n)+1}(\Gamma(n+\alpha+1))^2}{(2n+2\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}\binom{2n+2\alpha}{n}^{-2} \tag{6.5}$$

Apresentemos também um resultado devido a Geronimus [**57**] e que relaciona duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a medidas que diferem num número finito de pontos:

TEOREMA 6.2. *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$. A funcional linear $\boldsymbol{v}$ definida à custa da funcional linear $\boldsymbol{u}$ por*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{j=1}^{s} M_j \delta_{\lambda_j}\,, \quad \lambda_j \notin [-1,1]$$

é regular se e somente se

$$A = \begin{vmatrix} 1 + M_1 K_{n-1}(\lambda_1, \lambda_1) & \dots & M_s K_{n-1}(\lambda_s, \lambda_1) \\ \vdots & & \vdots \\ M_1 K_{n-1}(\lambda_1, \lambda_s) & \dots & 1 + M_s K_{n-1}(\lambda_s, \lambda_s) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{6.6}$$

onde K_n é o polinómio kernel associado a P_n, i.e.

$$K_{n-1}(x,y) = \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)P_n(y)}{x-y} \frac{1}{\|P_{n-1}\|^2}$$

e $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{u}$. Denotando por $\{R_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$ temos

$$\begin{vmatrix} 1 + M_1 K_{n-1}(\lambda_1, \lambda_1) & \dots & M_s K_{n-1}(\lambda_s, \lambda_1) & P_n(\lambda_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ M_1 K_{n-1}(\lambda_1, \lambda_s) & \dots & 1 + M_s K_{n-1}(\lambda_s, \lambda_s) & P_n(\lambda_s) \\ M_1 K_{n-1}(z, \lambda_1) & \dots & M_s K_{n-1}(z, \lambda_s) & P_n(z) - R_n(z) \end{vmatrix} = 0 \tag{6.7}$$

Além disso, a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$, $\{R_n\}$, admite a seguinte representação

$$\prod_{j=1}^{s}(x-\lambda_j)R_n(x) = P_{n+s}(x) + \sum_{j=1}^{s} d_{n,n+s-j} P_{n+s-j}(x)$$

onde $d_{n,n+s-j}$ vem dado em termos de M_j, $K_n(\lambda_i, \lambda_j)$ e dos elementos da relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$ verifica.

OBSERVAÇÃO . Pode ver-se que $\boldsymbol{v}$ é definida positiva se

$$\langle \boldsymbol{v}, P_n R_n \rangle = \langle \boldsymbol{u}, P_n^2(x) \rangle + \sum_{j=1}^{s} M_j R_n(\lambda_j) P_n(\lambda_j) > 0$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Para obter $\tilde{P}_n^{\alpha,\beta}$ em $-1, 1$ basta substituir em (6.7) x por $-1, 1$ e utilizar as fórmulas (6.2), (6.3) e (6.4).

Apresentemos os cálculos no caso em que $\alpha = \beta$, i.e. $P_n^{\alpha,\alpha} = P_n^\alpha$ é o polinómio de Gegenbauer de grau n.

Da definição de Kernel e de (6.2), (6.3) obtemos

$$K_{n-1}(1,1) = K_{n-1}(-1,-1) = \frac{nP_{n-1}^{\alpha+1}(1)P_{n-1}^\alpha(1) - (n-1)P_n^\alpha(1)P_{n-2}^{\alpha+1}(1)}{\|P_{n-1}\|^2}$$
$$K_{n-1}(-1,1) = K_{n-1}(1,-1) = (-1)^{n-1}\frac{P_n^\alpha(1)P_{n-1}^\alpha(1)}{\|P_{n-1}\|^2}$$

e portanto temos somente de calcular $K_{n-1}(1,1)$ e $K_{n-1}(-1,1)$. Mas de (6.4) facilmente se obtem

$$K_{n-1}(-1,1) = 2(-1)^{n-1}K_{n-1}(1,1)$$

e de (6.7) concluímos

$$\tilde{P}_n^{\alpha,\alpha}(1) = \left\{1 + \frac{3M_1M_2(K_{n-1}(1,1))^2 - (M_1+2M_2)K_{n-1}(1,1)}{(M_1+M_2)K_{n-1}(1,1) - 3M_1M_2(K_{n-1}(1,1))^2 + 1}\right\} P_n^\alpha(1)$$

$$\begin{aligned}&\tilde{P}_n^{\alpha,\alpha}(-1)\\ &= \left\{1 + \frac{3M_1M_2(K_{n-1}(1,1))^2 - (2M_1+M_2)K_{n-1}(1,1)}{(M_1+M_2)K_{n-1}(1,1) - 3M_1M_2(K_{n-1}(1,1))^2 + 1}\right\} (-1)^n P_n^\alpha(1)\end{aligned}$$

Para calcular $(\phi_n(0))$, de (5.5) e (5.6) vemos que necessitamos conhecer $R_n(1)$ e $R_n(-1)$. Assim, por definição

$$R_n(1) = \frac{1-M_2K_n}{1-M_2K_{n-1}}\frac{(M_1+M_2)K_{n-1} - 3M_1M_2K_{n-1}^2 + 1}{(M_1+M_2)K_n - 3M_1M_2K_n^2 + 1}\frac{P_{n+1}^\alpha(1)}{P_n^\alpha(1)}$$
$$R_n(-1) = -\frac{1-M_1K_n}{1-M_1K_{n-1}}\frac{(M_1+M_2)K_{n-1} - 3M_1M_2K_{n-1}^2 + 1}{(M_1+M_2)K_n - 3M_1M_2K_n^2 + 1}\frac{P_{n+1}^\alpha(1)}{P_n^\alpha(1)}$$

com $K_n = K_n(1,1)$. Daqui se conclui

$$\begin{aligned}\phi_{2n}(0) = &\left(\frac{1-M_1K_n}{1-M_1K_{n-1}} + \frac{1-M_2K_n}{1-M_2K_{n-1}}\right)\\ &\frac{(M_1+M_2)K_{n-1} - 3M_1M_2K_{n-1}^2 + 1}{(M_1+M_2)K_n - 3M_1M_2K_n^2 + 1}\frac{P_{n+1}^\alpha(1)}{P_n^\alpha(1)} + 1\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\phi_{2n+1}(0) = \frac{(M_1-M_2)(K_n - K_{n-1})}{2 - (M_1+M_2)(K_n+K_{n-1}) - 2M_1M_2K_nK_{n-1}} \tag{6.9}$$

Mas, $\binom{n+\alpha}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$, então das propriedades da função Γ se vê que

$$\frac{P_{n+1}^\alpha(1)}{P_n^\alpha(1)} \sim \frac{1}{2}\left(1 + (\alpha + \frac{1}{2}O(1/n))\right) \quad \text{e} \quad K_n \sim \frac{2^{-(\alpha+2)}n^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2 n!}$$

e portanto, a partir de (6.8) e (6.9) obtemos o comportamento assimptótico de $\phi_n(0)$:

$$\phi_{2n}(0) \sim (\alpha + 1/2)O(1/n) \quad \text{e} \quad \phi_{2n+1}(0) \sim \frac{M_1 - M_2}{2^{\alpha+3}} \frac{n^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2 n!}.$$

Aplicando a *fórmula de Stirling*, i.e.

$$\Gamma(n+1) = n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

concluímos que

$$\phi_{2n}(0) \sim (\alpha + 1/2)O(1/n) \quad \text{e} \quad \phi_{2n+1}(0) \sim \frac{M_1 - M_2}{2^{\alpha+3}\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\alpha+1)^2} \frac{n^{2\alpha-1/2-n}}{e^n}.$$

Logo $\phi_{2n+1}(0)$ converge para zero com uma velocidade de convergência superior à de $\phi_{2n}(0)$. Além disso, se $M_1 = M_2$ então $\phi_{2n+1}(0) = 0$ para $n \in \mathbb{N}$.

CAPÍTULO III

Generalização da Teoria de Szegő

1. Resultados Básicos 53

2. Problema dos Momentos e Fórmula Assimptótica 58

3. Uma Representação para a Medida Associada 64

4. Extensões desta Teoria Realizadas por Geronimus 69

5. Trabalho de Nikishin 73

1. Resultados Básicos

Comecemos por dar alguns resultados fundamentais da teoria dos polinómios ortogonais sobre a circunferência que vamos necessitar no decorrer deste capítulo.

TEOREMA 1.1 (Fórmula de Christoffel-Darboux). *Seja* $\{\phi_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre* $\mathbb{T}$, *i.e.*

$$\int_{\operatorname{supp}\mu} \phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}d\mu(x) = h_n\delta_{n,m}\,.$$

Então o polinómio Kernel que lhe está associado

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\phi_j(x)\overline{\phi_j(y)}}{h_j} \tag{1.1}$$

admite a seguinte representação

$$K_n(x,y) = \frac{\phi_n^*(x)\overline{\phi_n^*(y)} - x\bar{y}\phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}}{(1-x\bar{y})h_n}\,. \tag{1.2}$$

DEMONSTRAÇÃO. Procedamos por indução. Para $n = 0$ de (1.1) obtemos que $K_0(x,y) = \frac{1}{h_0}$ e de (1.2) $K_0(x,y) = \frac{1-x\bar{y}}{(1-x\bar{y})h_0}$. Verifiquemos que a propriedade é hereditária, i.e. supomos que (1.2) é verdadeira para $n \leq s$ e verifiquemos a sua veracidade para $n = s+1$. Assim de (1.1) e da hipótese de indução

$$K_{s+1}(x,y) = K_s(x,y) + \frac{\phi_{s+1}(x)\overline{\phi_{s+1}(y)}}{h_{s+1}}.$$

Mas de (II.2.2) obtemos

$$K_{s+1}(x,y) = \frac{(1-|a_s|^2)(\phi_s^*(x)\overline{\phi_s^*(y)} - x\bar{y}\phi_s(x)\overline{\phi_s(y)}) + (1-x\bar{y})\phi_{s+1}(x)\overline{\phi_{s+1}(y)}}{(1-x\bar{y})h_{s+1}}\,.$$

Aplicando (II.1.4) vem que

$$K_{s+1}(x,y) = \frac{\phi_s^*(x)\overline{\phi_s^*(y)} + |a_s|^2 x\bar{y}\phi_s(x)\overline{\phi_s(y)} - a_s x\phi_s(x)\overline{\phi_s^*(y)} - \bar{a}_s\bar{y}\phi_s^*(x)\overline{\phi_s(y)}}{(1-x\bar{y})h_{s+1}}$$

e aplicando (II.1.5) a esta equação obtemos (1.2). ■

Apresentemos agora duas propriedades extremais.

TEOREMA 1.2. *Sejam μ uma medida de Borel positiva e $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos que lhe está associada. Então*

$$\min_{\substack{q_n \in \mathbb{P}_n \\ q_n(z_0)=1}} \int_{\operatorname{supp}\mu} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \frac{1}{K_n(z_0, z_0)}\,. \tag{1.3}$$

Além disso, o mínimo é atingido para

$$q_n(z) = \frac{K_n(z, z_0)}{K_n(z_0, z_0)}\,.$$

DEMONSTRAÇÃO. Representemos

$$q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k \phi_k(z) \quad \text{com} \quad \sum_{k=0}^{n} b_k \phi_k(z_0) = 1$$

Mas como

$$\int_{\operatorname{supp}\mu} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 h_k$$

o nosso objectivo vai ser o de minimizar esta quantidade sujeita à condição $\sum_{k=0}^{n} b_k \phi_k(z_0) = 1$. Agora, da desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se

$$1 \le \sum_{k=0}^{n} |b_k|^2 h_k \sum_{k=0}^{n} \frac{|\phi_k(z_0)|^2}{h_k}$$

tendo-se igualdade se e somente se

$$b_k = \frac{\overline{\phi_k(z_0)}/h_k}{\sum_{k=0}^{n} |\phi_k(z_0)|^2/h_k}\,.$$

Que era o que queríamos demonstrar. ■

OBSERVAÇÃO . Da fórmula de Christoffel-Darboux concluímos que o polinómio q_n que minimiza o integral de (1.3) sujeito à condição $q_n(0) = 1$ é ϕ_n^*.

Temos ainda a seguinte propriedade apresentada por Achieser em [**2**, pp. 243].

TEOREMA 1.3. *Sejam $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tais que $|z_j| > 1$ para $j = 1, \ldots, k$ e $|z_j| \le 1$ para $j = k+1, \ldots, n$. Então, para $N \ge n$ e para todo o $p > 0$ tem-se*

$$\min_{\substack{q \in \mathbb{P} \\ q(z)=z^N+\ldots}} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \left| \frac{q(z)}{\prod_{j=1}^{n}(z - z_j)} \right|^p |dz| = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} |z_j|^p}\,. \tag{1.4}$$

Vamos necessitar de uma desigualdade válida para funções integráveis.

TEOREMA 1.4 (Desigualdade de Jensen). *Seja f uma função integrável em $[0, 2\pi[$ verificando $a < f(x) < b$. Se φ é uma função convexa em $]a, b[$ então*

$$\varphi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(f(\theta)\right)d\theta \tag{1.5}$$

Apresentamos agora o teorema fulcral desta teoria [**2, 47, 57, 143**].

TEOREMA 1.5 (Szegő). *Seja $w(x) \geq 0$ para $x \in [0, 2\pi[$ uma função integrável tal que $\int_0^{2\pi} w(t)dt > 0$. Defina-se*

$$\mathcal{Q}(w) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln w(t)dt\right\} & , \quad \ln w \in L \\ 0 & , \quad \ln w \notin L \end{cases} \tag{1.6}$$

Então para todo o $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n \\ q(0)=1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{it})|^p w(t)dt = \mathcal{Q}(w)\,. \tag{1.7}$$

DEMONSTRAÇÃO. Introduzamos a notação

$$\mu_n(w;p) = \min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n \\ q(0)=1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{it})|^p w(t)dt\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

então $\mu_{n+1}(w;p) \leq \mu_n(w;p)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$; e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(w;p) = \mu(w;p) \geq 0 \tag{1.9}$$

Assim, de (1.8) e (1.9) podemos reinterpretar (1.7) dizendo que queremos provar que $\mu(w;p) = \mathcal{Q}(w)$.

Aplicando a desigualdade de Jensen com $\varphi = -\ln$ e $f = |q(e^{it})|^p w(t)$ obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{it})|^p w(t)dt \\ &\qquad\qquad \geq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\ln w(t) + \ln|q(e^{it})|^p)dt\right) \\ &\qquad\qquad \geq \mathcal{Q}(w)\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|q(e^{it})|^p dt\right). \end{aligned}$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ o polinómio que minimiza o integral de (1.7) é ϕ_n^* podemos tomar q na última desigualdade com raízes em $|z| > 1$. Logo $\ln|q(z)|^p$ é uma *função harmónica em* $|z| < 1$, i.e. contínua e tal que para todo o $z \in B_{0,1}$

se tem

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt = f(z)$$

com r tal que $z+re^{it}\in B_{0,1}$. Assim,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{it})|^p w(t)dt \geq |q(0)|^p \mathcal{Q}(w).$$

Sendo assim temos a desigualdade $\mu(w;p)\geq \mathcal{Q}(w)$.

Provemos agora que $\mu(w;p)\leq \mathcal{Q}(w)$. Começaremos por provar esta desigualdade para $w(t)=\frac{1}{|r(e^{it})|^p}$ com $r\in\mathbb{P}$ e raízes em $|t|>1$. Então para $n\geq \operatorname{gr} r$

$$\min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n\\ q(0)=1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{it})|^p w(t)dt = \min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n\\ q(0)=1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{q(e^{it})}{r(t)}\right|^p dt$$

e pelo Teorema 1.3 e como $\ln\frac{1}{|r(e^{it})|^p}$ é uma função harmónica temos

$$\min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n\\ q(0)=1}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(t)|^p w(t)dt = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\frac{1}{|r(e^{it})|^p}dt\right\}$$

Temos então que

$$\mu(w;p)=\mathcal{Q}(w) \quad \text{para} \quad w(t)=\frac{1}{|r(e^{it})|^p} \quad \text{e} \quad r\in\mathbb{P}.$$

Considere-se agora w função contínua com $w(t)\geq\rho>0$. Pelo Teorema de Weierstrass existem S_m, s_m (polinómios trigonométricos) tais que

$$\frac{1}{S_m(t)} < w^{2/p}(t) < \frac{1}{s_m(t)}$$

e $\frac{1}{S_m^{p/2}}$ e $\frac{1}{s_m^{p/2}}$ aproxima uniformemente w quando $n\to\infty$. Do Teorema de Fejér-Riesz (cf. Teorema II.6.1) sabemos que os polinómios trigonométricos positivos, r, admitem a representação $r(t)=|s(e^{it})|^2$. Assim, de

$$\mu(\frac{1}{S_m^{p/2}(t)};p) < \mu(w(t);p) < \mu(\frac{1}{s_m^{p/2}(t)};p)$$

concluímos que

$$\mu(w;p)=\mathcal{Q}(w) \qquad \text{para} \qquad w(t)\in C([0,2\pi[).$$

Sendo w uma função integrável em $[0,2\pi[$ e verificando $w(t)\geq\rho>0$, sabemos que para todo o $\epsilon>0$ existe $f\in C([0,2\pi[)$ com $f(t)\geq\frac{\rho}{2}$ e

$$\int_0^{2\pi} |f(t)-w(t)|^p dt < \epsilon^p\,, \quad \forall p>0$$

Como $-\ln$ é uma função convexa

$$\ln f - \ln w \leq \frac{2}{\rho}|f-w|$$

e integrando e tomando exp obtemos

$$\mathcal{Q}(f) \leq \exp(\frac{2\epsilon}{\rho\pi})\mathcal{Q}(w)$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} & |q(e^{it})|^p w(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{it})|^p f(t)\left(\frac{w(t)}{f(t)}-1\right)dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q(e^{it})|^p f(t)dt\end{aligned}$$

e da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} & |q(e^{it})|^p w(t)dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi}|q(e^{it})|^{2p} f^2(t)dt}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi}\left|\frac{w(t)}{f(t)}-1\right|^2 dt}\right) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi}|q(e^{it})|^{2p} f^2(t)dt}\left(1+\frac{\epsilon}{\rho}\right)\end{aligned}$$

Logo

$$\mu_n(w;p) \leq \left(1+\frac{\epsilon}{\rho}\right)\sqrt{\mu_n(f^2;2p)}$$

Então

$$\begin{aligned}&\mu_n(w;p) \\ &\quad\leq \left(1+\frac{\epsilon}{\rho}\right)\sqrt{\mathcal{Q}(f^2)} = \left(1+\frac{\epsilon}{\rho}\right)\mathcal{Q}(f) \\ &\quad\leq \left(1+\frac{\epsilon}{\rho}\right)\exp(\frac{2\epsilon}{\rho\pi})\mathcal{Q}(w)\end{aligned}$$

Para eliminarmos a restrição $w(t) \geq \rho > 0$ basta ver que

$$\mu(w+\epsilon;p) \leq \mathcal{Q}(w+\epsilon)$$

logo $\mu(w;p) \leq \mathcal{Q}(w+\epsilon)$. Tomando limite quando $\epsilon \to 0$ obtemos (1.7).

Investiguemos agora o caso em que $\mathcal{Q}(w) = 0$, i.e. $\int_0^{2\pi}\ln w(t)dt = -\infty$. Para todo o $\epsilon > 0$ temos

$$\mu(w+\epsilon;p) = \mathcal{Q}(w+\epsilon)\,.$$

Temos então que mostrar que

$$\lim_{n\to 0}\int_0^{2\pi}\ln(w(t)+\epsilon)dt=\infty\,.$$

Assim, escrevamos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\ln(w(t)+\epsilon)dt &= \int_0^{2\pi}\ln^+(w(t)+\epsilon)dt-\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{w(t)+\epsilon}dt\\ &= I_1(\epsilon)-I_2(\epsilon)\end{aligned}$$

com $\ln^+ a=\begin{cases}\ln a & ,\ a>1\\ 0 & ,\ 0<a\leq 1\end{cases}$. Agora, vê-se que

$$0\leq I_1(\epsilon)\leq\int_0^{2\pi}(w(t)+\epsilon)dt=\int_0^{2\pi}w(t)dt+2\pi\epsilon$$

pelo que temos que provar que $\lim_{\epsilon\to 0} I_2(\epsilon)=\infty$.

Suponhamos que $\lim_{\epsilon\to 0} I_2(\epsilon)=N<\infty$. Então pelo Lema de Fatou

$$\int_0^{2\pi}\ln^+\frac{1}{w(t)}dt\leq N$$

o que contraria a nossa hipótese. ■

2. Fórmula Assimptótica

Apresentemos alguns resultados de Análise Complexa que podem ser encontrados em [**3, 32, 79, 132**].

TEOREMA 2.1 (Prolongamento Analítico). *Seja f uma função analítica no interior do domínio $B\subset\mathbb{C}$. Se f se anula num domínio $B_1\subset B$ então f é constantemente nula em B.*

TEOREMA 2.2 (Montel). *Seja $\{f\}$ uma família de funções analíticas num mesmo domínio B. Se $\{f\}$ é uniformemente limitada em B, então $\{f\}$ é uma família normal, i.e. de toda a sucessão de funções de $\{f\}$ podemos extrair uma subsucessão uniformemente convergente num compacto de B.*

TEOREMA 2.3 (Hurwitz). *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão de funções analíticas no domínio $B\subset\mathbb{C}$, convergindo uniformemente sobre um compacto K de B para uma função $f\not\equiv$const. Se $f(z_0)=0$ então existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para $n\geq n_0$ $f_n(z)=0$ para $z\in\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<r\}\subset B$.*

TEOREMA 2.4 (Dini). *Sejam K um conjunto compacto munido de uma métrica, d, e $\{f_n\}$ uma sucessão crescente de funções contínuas em K, i.e.*

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \dots, \quad x \in K.$$

Se $\{f_n\}$ converge pontualmente para uma função contínua f em K, então esta convergência é uniforme.

Definamos a classe de medidas que pretendemos estudar:

DEFINIÇÃO 2.1. Seja μ uma medida positiva de Borel sobre $\mathbb{T}$. Dizemos que μ pertence à *classe de Szegő*, $\mathcal{S}$, se e somente se $\ln \mu'$ é integrável, i.e. $\int_{\operatorname{supp}\mu} \ln \mu' dx > -\infty$, onde μ' representa a.e. a parte absolutamente contínua da medida μ.

O próximo teorema contém os resultados fundamentais da teoria desenvolvida por Szegő em [**143**] e foi enunciado por Geronimus em [**57**].

TEOREMA 2.5. *Seja $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva μ definida em $[0, 2\pi[$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$.

(b) *Existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{T_{n-1}} \neq 0$.

(c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\phi_n(z)|^2}{h_n} < \infty$ *pelo menos num ponto $z \in B_{0,1}$, o que implica a convergência uniforme em $B(0,1)$.*

(d) $\{\frac{\phi^*_{n_\nu}(z)}{\sqrt{h_{n_\nu}}}\}$ *converge para algum $z \in B_{0,1}$, o que implica a convergência uniforme em $B(0,1)$.*

(e) $\phi_{n_\nu}(z) \simeq z^{n_\nu} \frac{1}{\bar{D}(1/z)}$ *para algum $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e onde D é uma função analítica que chamaremos função de Szegő.*

(f) *Existe $M > 0$ tal que pelo menos para algum $z_0 \in B_{0,1}$,*

$$\max_{\substack{q_n \in \mathbb{P}_n \\ \int |q_n|^2 d\mu = 1}} |q_n(z_0)|^2 < M.$$

(g) $\mu \in \mathcal{S}$.

DEMONSTRAÇÃO. (a) $\iff$ (b). Vimos já que

$$h_n = c_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2) = \frac{T_n}{T_{n-1}}$$

Como a convergência da série $\sum |a_n|^2$ é equivalente à do produto infinito $\prod(1-|a_k|^2)$ temos o pretendido.

(a) $\iff$ (c). Da fórmula de Christoffel-Darboux com $x = y = 0$ vem

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\phi_k(0)|^2}{h_k} = \frac{|\phi_n^*(0)|^2}{h_n} = \frac{1}{h_n} = \frac{1}{c_0 \prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)}$$

Assim, a convergência da série desejada no ponto $z = 0$ é equivalente à convergência da série $\sum |a_n|^2$.

Provemos que nestas condições temos convergência uniforme em todo o ponto de $B(0,1)$. Pela fórmula de Christoffel-Darboux obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\phi_k(z)|^2}{h_k} = \frac{|\phi_n^*(z)|^2 - |z|^2|\phi_n(z)|^2}{(1-|z|^2)h_n} \tag{2.1}$$

Logo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\phi_k(z)|^2}{h_k} + \frac{|z|^2}{1-|z|^2}\frac{|\phi_n(z)|^2}{h_n} = \frac{1}{1-|z|^2}\frac{|\phi_n^*(z)|^2}{h_n}$$

Temos então

$$\sqrt{\frac{|\phi_n^*(z)|^2}{h_n}} \geq \sqrt{\frac{1-|z|^2}{c_0}}\,, \quad |z| < 1$$

Assim

$$\frac{1}{|\phi_n^*(z)|} \leq \frac{\sqrt{c_0}}{\sqrt{h_n}\sqrt{1-|z|^2}}\,, \quad |z| < 1$$

Da convergência de h_n quando $n \to \infty$ (cf. (b)) obtemos que $\{\frac{1}{\phi_n^*(z)}\}$ é uniformemente limitada em $|z| \leq 1$. Aplicando o Teorema de Montel, sabemos existir uma subsucessão $\{\frac{1}{\phi_{n_k}^*}\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\phi_{n_k}^*(z)} = D(z)\,, \quad |z| \leq r < 1$$

Como a convergência é uniforme D é analítica em $|z| \leq r < 1$ e pelo Teorema de Hurwitz D é uma função que não se anula em $|z| \leq r < 1$. Logo $\{\sum_{0\leq k\leq n} \frac{|\phi_k(z)|^2}{h_k}\}$ é uma sucessão crescente de funções contínuas em $|z| < 1$ e converge pontualmente pois de (2.1)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|\phi_k(z)|^2}{h_k} \leq \frac{|\phi_n^*(z)|^2}{(1-|z|^2)h_n}.$$

Aplicando o Teorema de Dini temos a convergência uniforme de $\sum \frac{|\phi_n(z)|^2}{h_n}$ em $|z| \leq r < 1$.

(c) $\Longleftrightarrow$ (d). Resulta da demonstração anterior.

(f) $\Longleftrightarrow$ (c). Na verdade

$$\max_{\substack{q_n \in \mathbb{P}_n \\ \int |q_n|^2 d\mu = 1}} |q_n(z_0)|^2 = \min_{\substack{q_n \in \mathbb{P}_n \\ q_n(z_0)=1}} \frac{1}{\int |q_n|^2 d\mu}$$

e pelo Teorema 1.2 concluímos que

$$\max_{\substack{q_n \in \mathbb{P}_n \\ \int |q_n|^2 d\mu = 1}} |q_n(z_0)|^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{|\phi_k(z_0)|^2}{h_k}.$$

Daqui se obtém que (c) $\Longrightarrow$ (f).

Suponhamos agora que se tem (f), então a sucessão $\{K_n(z_0, z_0)\}$ é limitada e por definição monótona logo convergente. Do Teorema de Dini temos a convergência uniforme.

(d) $\Longleftrightarrow$ (e). Vimos já que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n^*(z) = D^{-1}(z) \quad \text{uniformemente em} \quad B_{0,1}.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t^n}\bar{\phi}_n(t) = D^{-1}(1/t) \quad \text{uniformemente em} \quad |t| > 1.$$

Agora tomando $t \in \mathbb{R}$ com $|t| > 1$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t^n}\phi_n(t) = \bar{D}^{-1}(1/t) \quad \text{uniformemente em} \quad |t| > 1.$$

Então, pelo princípio do prolongamento analítico temos esta convergência para $t \in \mathbb{C}$ com $|t| > 1$.

(g) $\Longleftrightarrow$ (a). Esta equivalência resulta directamente do Teorema 1.5 e da alínea (f). ■

OBSERVAÇÃO . Do Teorema 2.5 (f) obtemos que a condição (a) do mesmo Teorema é equivalente a dizer que $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é denso em $\mathrm{L}^2_\mu([0, 2\pi[)$.

De facto, seja z_0 tal que $|z_0| < 1$. É sabido que $\frac{1}{z-z_0} \in \mathrm{L}^2_\mu$. Mas

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} & \left|\frac{1}{z-z_0} - q_n(z)\right|^2 d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{|z-z_0|^2} \left|1-(z-z_0)q_n(z)\right|^2 d\mu(z) \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+|z_0|^2}\int_0^{2\pi} |q_{n+1}(z)|^2 d\mu(z) \\ &\geq \frac{1}{1+|z_0|^2}\frac{1}{K_{n+1}(z_0,z_0)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Supondo a convergência de $\sum |\phi_n(0)|^2/h_n$ obtemos que $\frac{1}{z-z_0}$ não pode ser aproximada em L^2_μ por $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Verifiquemos que se tem o recíproco. Para tal procedamos por redução ao absurdo, i.e. suponhamos que a série $\sum |\phi_n(0)|^2/h_n$ é divergente. Então

$$\begin{aligned}\min_{q_n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} & |e^{-i\theta} - q_n(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) \\ &= \min_{q_n} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 - zq_n(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) \\ &= \frac{1}{K_n(0,0)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

Logo $e^{-i\theta}$ é aproximada por $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ em L^2_μ. Da mesma forma se pode ver que $e^{-ik\theta}$ com $k \geq 2$ é aproximada por $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ em L^2_μ. Logo $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em L^2_μ.

Vejamos o que se passa quando $|z| = 1$, [**56, 143**].

TEOREMA 2.6. *Seja $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva μ definida em $[0, 2\pi[$ verificando*

$$\int_0^{2\pi} \ln p(\theta) d\theta > -\infty$$

onde $p(\theta) = \mu'(\theta)$. Então

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\phi_n^*(e^{i\theta}) - (D(e^{i\theta}))^{-1}\right\|_{2,\mu} = 0 \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta})p(\theta)}{n+1} - 1\right\|_{1,\mu} = 0 \tag{2.3}$$

Assim, existem subsucessões $\phi_{n_s}^*$ e K_{n_k} tais que a.e.

$$\lim_{s\to\infty} \phi_{n_s}^*(e^{i\theta}) = \frac{1}{D(e^{i\theta})}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{K_{n_k}(e^{i\theta}, e^{i\theta})}{n_k+1} = \frac{1}{p(\theta)}. \tag{2.4}$$

DEMONSTRAÇÃO. Da alinea (d) do Teorema 2.5 sabemos que

$$
\begin{aligned}
\delta_n = \min_{G_n} \left\| \frac{1}{D(e^{i\theta})} - G_n(e^{i\theta}) \right\|_{2,\mu} & \\
&= \left\| \frac{1}{D(e^{i\theta})} - \frac{h}{h_n}\phi_n^*(e^{i\theta}) \right\|_{2,\mu} \\
&= |h| \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\overline{\phi_k(0)}\phi_k(e^{i\theta})}{h_k} \right|^2 d\mu(\theta) \right)^{1/2} \\
&= |h| \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\phi_k(0)|^2}{h_k}} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\left| \phi_n^*(e^{i\theta}) - \frac{1}{D(e^{i\theta})} \right| \leq \left| 1 - \frac{h}{h_n} \right| \left| \phi_n^*(e^{i\theta}) \right| + \left| \frac{1}{D(e^{i\theta})} - \frac{h}{h_n}\phi_n^*(e^{i\theta}) \right|
$$

e portanto

$$
\left\| \phi_n^*(e^{i\theta}) - \frac{1}{D(e^{i\theta})} \right\|_{2,\mu}^2 \leq \left| 1 - \frac{h}{h_n} \right|^2 \left\| \phi_n^*(e^{i\theta}) \right\|_{2,\mu}^2 + \delta_n^2
$$

Agora como $\phi_n^* \in \mathrm{L}^2_\mu([0, 2\pi[)$ temos (2.2).

Da mesma forma se prova (2.3); e (2.4) é um caso particular destas duas convergências. ∎

Este resultado vai ser fundamental para a obtenção de fórmulas assimptóticas para a sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $[-1, 1]$ que está associada a $\{\phi_n\}$.

Vamos tecer considerações e obter algumas consequências acerca dos resultados apresentados neste capítulo.

OBSERVAÇÃO .

- Uma função de variação limitada σ pode ser representada como soma de três funções $\sigma(\theta) = \sigma_1(\theta) + \sigma_2(\theta) + \sigma_3(\theta)$ onde σ_1 é absolutamente contínua, σ_2 é uma função em escada e σ_3 é a parte singular.

  Szegő [**143**] obteve a fórmula assimptótica para ϕ_n em $|z| > 1$ (cf. Teorema 2.5 (e)) supondo $\sigma_2(\theta) = \sigma_3(\theta) = 0$.
- Vimos também que (a_n) tal que

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(z).$$

Se (a_n) é tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$ então como

$$\phi_n^*(z) = 1 - z\sum_{k=0}^{n-1} a_k\phi_k(z)$$

obtemos

$$\frac{1}{D(z)} = 1 - z\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z)$$

i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z) = \frac{D(z)-1}{zD(z)}, \quad |z|<1.$$

3. Uma Representação para a Medida Associada

Comecemos por provar a seguinte relação:

TEOREMA 3.1. *Sejam $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ sobre $\mathbb{T}$ e $\{\Omega_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada de primeira espécie. Então*

$$\phi_n^*(z)\Omega_n(z) + \phi_n(z)\Omega_n^*(z) = \frac{2h_n z^n}{c_0}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. De (II.1.4) e (II.3.3) obtemos

$$\bar{a}_n(\phi_n^*(z)\Omega_n(z) + \phi_n(z)\Omega_n^*(z)) = -\phi_{n+1}(z)\Omega_n(z) + \phi_n(z)\Omega_{n+1}(z) \tag{3.2}$$

Mas $\{\phi_n\}$ e $\{\Omega_n\}$ verificam (II.3.5) logo

$$\bar{a}_n(\phi_{n+1}(z)\Omega_{n+2}(z) - \phi_{n+2}(z)\Omega_{n+1}(z))$$
$$= z\bar{a}_{n+1}(1-|a_n|^2)(\phi_n(z)\Omega_{n+1}(z) - \phi_{n+1}(z)\Omega_n(z))$$

Assim, de (3.2) obtemos

$$\phi_n^*(z)\Omega_n(z) + \phi_n(z)\Omega_n^*(z)$$
$$= \frac{z(1-|a_{n-1}|^2)}{\bar{a}_{n-1}}(\phi_{n-1}(z)\Omega_n(z) - \phi_n(z)\Omega_{n-1}(z))$$

e portanto aplicando (II.2.2) obtemos (3.1). ∎

Como consequência deste resultado temos que

$$c_0 \Re e \left(\frac{\Omega_n^*(e^{i\theta})}{\phi_n^*(e^{i\theta})} \right) = \frac{h_n}{|\phi_n^*(e^{i\theta})|^2} \tag{3.3}$$

Agora como

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \left(\phi_n^*(e^{i\theta}) - \phi_n^*(z) \right) d\mu(\theta)$$

temos

$$\begin{aligned} & c_0 \Omega_n^*(z) \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \left(z^n \overline{\phi_n^*(e^{i\theta})} - \phi_n^*(z) \right) d\mu(\theta) \\ & = c_0 \phi_n^*(z) \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta) - \frac{z^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \overline{\phi_n^*(e^{i\theta})} d\mu(\theta) \end{aligned}$$

Tendo em conta a definição de F dada em (II.3.1) podemos escrever

$$\begin{aligned} & c_0 (F(z) \phi_n^*(z) - \Omega_n^*(z)) \\ & \qquad = z^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k e^{-ik\theta} \right) \overline{\phi_n(e^{i\theta})} d\mu(\theta) \\ & \qquad = 2 z^n \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \overline{\phi_n(e^{i\theta})} d\mu(\theta) \\ & \qquad = O(z^{n+1}), \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

Como $\phi_n^*(z) \neq 0$ para $|z| < 1$ obtemos

$$F(z) - \frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} = O(z^{n+1}), \quad |z| < 1 \tag{3.4}$$

Vemos também que da relação de recorrência que $\{\Omega_n\}$ e $\{\phi_n\}$ verificam

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_{n+1}(z)}{\phi_{n+1}(z)} + \frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} \\ & \qquad = \frac{z\Omega_n(z) + \bar{a}_n \Omega_n^*(z)}{z\phi_n(z) - \bar{a}_n \phi_n^*(z)} + \frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} \\ & \qquad = \frac{z(\Omega_n(z)\phi_n^*(z) + \Omega_n^*(z)\phi_n(z))}{\phi_{n+1}(z)\phi_n^*(z)} \end{aligned}$$

e de (3.1) obtemos

$$\frac{\Omega_{n+1}(z)}{\phi_{n+1}(z)} + \frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} = \frac{z^{n+1} h_n}{c_0 \phi_{n+1}(z) \phi_n^*(z)}.$$

Assim, os primeiros n termos da expansão em série de Maclaurin de $-\frac{\Omega_{n+1}(z)}{\phi_{n+1}(z)}$ e $\frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)}$ coincidem. Logo de (3.4) sai que

$$F(z) + \frac{\Omega_n(z)}{\phi_n(z)} = O(z^n), \quad |z| < 1 \tag{3.5}$$

Os resultados contidos em (3.4) e (3.5) podem ser estendidos a sucessão de polinómios mónicos não necessariamente ortogonais (ver [**121**]):

TEOREMA 3.2. *Seja ϕ_n um polinómio de grau exactamente n. Se existir uma medida μ a respeito da qual*

$$\int_0^{2\pi} \phi_n(z) z^{-j} d\mu(\theta) = 0\,, \quad j = -k, \ldots, n+i-1$$

com $k, i \in \mathbb{N}$, então denotando por $\Omega_n \in \mathbb{P}_n$ o associado relativamente à medida μ de ϕ_n temos

$$\phi_n(z)F(z) + \Omega_n(z) = O(z^{n+i}) \quad e \quad \phi_n^*(z)F(z) - \Omega_n^*(z) = O(z^{n+k+1})$$

onde F é a função de Caratheodory associada a μ.

Damos agora uma representação para as medidas μ pertencentes à classe de Szegő:

TEOREMA 3.3. *Se $\mu \in \mathcal{S}$ então μ pode ser representada por*

$$d\mu(\theta) = d\mu'(\theta) + \sum_{j=1}^{\infty} M_j \delta(\theta_j) \tag{3.6}$$

onde a parte absolutamente contínua da medida μ, μ' vem dada por

$$\mu'(\theta) = h|D(e^{i\theta})|^2 \quad a.e. \;\; em \; [0, 2\pi[\tag{3.7}$$

$$M_j = \frac{c_0}{e^{i\theta_j}} \lim_{z \to e^{i\theta_j}} (e^{i\theta_j} - z)F(z)\,. \tag{3.8}$$

e $\theta_j \in [0, 2\pi[$ para $j = 1, \ldots, \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\mu \in \mathcal{S}$, da alínea (a) do Teorema 2.5 sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; logo de (II.5.3) e (II.5.4) concluímos que

$$d\nu(\theta) = \frac{1}{2}|\sin\theta| d\mu(\cos\theta)$$

está na classe $M(1, 0)$. Como $\nu \in M(1, 0)$ sabemos do Teorema I.7.3 que $\operatorname{supp}\mu = [-1, 1] \cup \{\lambda_j\}_1^{\infty}$. Além disso, pode ver-se que a transformada de Stieltjes da medida ν e a função de Caratheodory de μ estão relacionadas por (cf. [**121**])

$$\chi(y; \nu) = \frac{2z}{1 - z^2} F(z) \quad \text{para} \quad |y| = |z + \sqrt{z^2 - 1}| \longrightarrow \infty,$$

logo μ admite a representação (3.6).

Vejamos agora a representação da parte absolutamente contínua de μ. Do Teorema 1.5 sabemos

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln p(t)dt\right\} = \lim_{n\to\infty}\min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n\\ q(0)=1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q(e^{i\theta})|^2p(\theta)d\theta$$

Mas

$$\min_{\substack{q\in\mathbb{P}_n\\ q(0)=1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q(e^{i\theta})|^2p(\theta)d\theta = \frac{1}{K_n(0,0)} = \frac{h_n}{|\phi_n^*(0)|^2}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln p(t)dt = \ln h|D(0)|^2$$

e como D é uma função analítica em $B_{0,1}$ obtemos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln p(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln h|D(e^{i\theta})|^2d\theta.$$

Tem-se assim (3.7).

Pelo Teorema de Herglotz [**72**] (cf. [**57**, pp. 17]) sabemos que $F(z)$ definida por (II.3.1) é analítica em $B_{0,1}$. Então da definição de F e da representação de μ obtemos (3.8). ■

OBSERVAÇÃO . De (3.3) vemos que a parte absolutamente contínua da medida μ está relacionada com $\Re e\frac{\Omega_n^*(e^{i\theta})}{\phi_n^*(e^{i\theta})}$, e de (3.4) vemos que "não está longe" de $\Re eF(e^{i\theta})$.

Apresentemos agora um resultado de Peherstorfer [**121**] que nos dá uma condição para que a parte absolutamente contínua da medida possa ser representada em termos da parte real de F.

TEOREMA 3.4. *Seja F analítica em $|z| < 1$ e suponhamos que F tem um número finito de polos de ordem um em $|z_k| = 1$, $k = 1,\ldots,m$, i.e. $\lim_{n\to\infty}(z-z_k)F(z) = \gamma_k$, com $\gamma_k/z_k \in \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{z\to e^{i\varphi}}\Re e\left(F(z) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\gamma_k}{z-z_k}\right)$$

existe a.e. e é $L^p[0,2\pi[$ integrável com $p>1$, então

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\sigma(\varphi)$$

com

$$d\sigma(\varphi) = (\Re e F(e^{i\varphi}) - const.)d\varphi - \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi\gamma_k}{z_k}\delta(e^{i\varphi} - z_k)d\varphi$$

onde $\Re e F(e^{i\varphi}) = \lim_{z \to e^{i\varphi}} \Re e F(z)$ *e* $const. = \sum_{k=1}^{m} \frac{\pi\gamma_k}{z_k}$.

Vejamos agora como obter fórmulas assimptóticas para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associada a μ com $\operatorname{supp}\mu = [-1,1] \cup \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ que estão associadas à sucessões de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ (cf. Teoremas II.5.1 e II.5.2).

TEOREMA 3.5. *Sejam* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* μ *e* $\{\phi_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* ν *com* $d\nu(\theta) = \frac{1}{2}|\sin\theta| d\mu(\cos\theta)$*; então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $0 < \prod_{n \in \mathbb{Z}^+} 4\gamma_n < \infty$.

(b) $P_n(x) = (z/2)^n (\bar{D}(1/z))^{-1} + o(1)$, $|z| = |x + \sqrt{x^2 - 1}| > 1$.

(c) $P_n(\cos(\theta)) = \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{e^{in\theta}}{\overline{D(e^{i\theta})}} + \dfrac{e^{-in\theta}}{D(e^{i\theta})}\right) + o(1)$, $z = e^{i\theta}$, *onde esta convergência é tomada em norma* $\|.\|_{2,\mu}$.

(d) *Existe* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\ln w(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ *onde* $w(x) = \nu'(x)$ *a.e. em* $[0, 2\pi[$

DEMONSTRAÇÃO. As três primeiras alíneas são consequência directa dos Teoremas 2.5 e 2.2 e das fórmulas (II.5.1) e (II.5.3). Para a alínea (d) basta notar que com $p(\theta) = w(\cos(\theta))|\sin(\theta)|$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln p(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\ln w(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\sin(\theta) d\theta$$

e a existência de um destes integrais implica a existência do outro, visto que $\int_0^{2\pi} \ln\sin(\theta)d\theta$ existe. ■

Uma condição suficiente para que a medida μ seja tal que o seu suporte tenha somente um número finito de pontos fora de $[-1,1]$ (cf. [**149**, T. 60, pp. 126]), é dada em termos dos coeficientes da relação de recorrência a três termos que $\{P_n\}$ verifica, i.e. (β_n), (γ_n)

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n\left(\left|\gamma_n - \frac{1}{4}\right| + |\beta_n|\right) < \infty$$

Este resultado era já conhecido da teoria espectral dos operadores tipo Sturm--Liouville desenvolvida por Marchenko [**99**] ou do estudo do espectro de matrizes de Jacobi realizado por Guseinov [**67**].

4. Extensões desta Teoria Realizadas por Geronimus

Vamos dar condições sobre os parâmetros de reflexão para que a medida associada seja absolutamente contínua.

EXEMPLO 4.1. Seja $a_n = \frac{1}{n+a}$ com $a > 1$. Então a medida μ que lhe está associada vem dada por $d\mu(\theta) = c_0\frac{a-1}{a}d\theta + \frac{2\pi c_0}{a}\delta(\theta)$.

Neste caso (a_n) verifica a alínea (a) do Teorema 2.5. Calculemos explicitamente ϕ_n^* e Ω_n^*. Tomando $y_{n+1} = \frac{n+a}{n+a+1}z$ em (II.3.8), obtemos

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1}y_{n+1} - u_n y_n$$

e portanto

$$u_{n+1} - zu_n\frac{n+a-1}{n+a} = C$$

Tomando agora $v_n = (n+a-1)u_n$ vem

$$v_{n+1} - zv_n = (n+a)C$$

Então

$$\begin{aligned}
v_n &= Az^n + \frac{C(n+a-\frac{1}{1-z})}{1-z} \\
u_n &= \frac{Az^n}{n+a-1} + \frac{C(n+a-\frac{1}{1-z})}{(1-z)(n+a-1)} \\
C &= u_1 - u_0 z\frac{a-1}{a} \\
A &= u_0(a-1) - \frac{C(a-\frac{1}{1-z})}{1-z}
\end{aligned}$$

Tomando $u_0 = 1$, $u_1 = 1 \mp \frac{z}{a}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\phi_n^*(z) &= 1 - \frac{z(z^n-1)}{(n+a-1)(z-1)} \\
\Omega_n^*(z) &= -\frac{z^{n+1}(a(1-z)-2)}{a(n+a-1)(1-z)^2} + \frac{(n+a-\frac{1}{1-z})(1-z+\frac{2z}{a})}{(1-z)(n+a-1)}
\end{aligned}$$

Então para $|z| < 1$ com $n \to \infty$ temos

$$\begin{aligned} D(z) &= \lim_{n\to\infty} \phi_n^*(z) = 1 \\ \omega(z) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\Omega_n^*(z)} = \frac{1-z}{a-z(a-2)} \\ F(z) &= \frac{D(z)}{\omega(z)} = \frac{1+z}{a(1-z)} + \frac{a-1}{a} \end{aligned}$$

De (3.8) se conclui que a massa no ponto 1 é igual a $\frac{2\pi c_0}{a}$.

Vejamos agora um resultado de Geronimus [**57**].

TEOREMA 4.1 (Geronimus). *Sejam $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ e (a_n) os seus parâmetros de reflexão. Se a série $\sum |a_n|$ é convergente então*

$$\phi_n^*(z) \simeq \frac{1}{D(z)} + \epsilon_n\,, \quad |z| \le 1 \quad e \quad \epsilon_n = O(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|) \tag{4.1}$$

$$\phi_n(z) \simeq z^n(\frac{1}{\bar{D}(1/z)} + \epsilon_n')\,, \quad |z| \ge 1 \quad e \quad \epsilon_n' = O(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|) \tag{4.2}$$

Além disso, μ é absolutamente contínua e $\mu(\theta) = \int_0^\theta h|D(e^{it})|^2 dt$.

DEMONSTRAÇÃO. De (II.1.5) obtemos sucessivamente

$$\frac{\phi_{n+1}^*(z)}{\phi_n^*(z)} = 1 - za_n \frac{\phi_n(z)}{\phi_n^*(z)}$$
$$\phi_{n+1}^*(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - za_k \frac{\phi_k(z)}{\phi_k^*(z)}\right)$$

E para $|z| \le 1$ temos

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|) \le |\phi_n^*(z)| \le \prod_{k=0}^{n-1}(1+|a_k|)$$

A convergência de $\sum |a_n|$ implica que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n^*(z) = \frac{1}{D(z)} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - za_n \frac{\phi_n^*(z)}{\phi_n(z)}\right)\,, \quad |z| \le 1$$

Além disso,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|) \le |1/D(z)| \le \prod_{k=0}^{n-1}(1+|a_k|)$$

e sabemos que

$$\phi_n^*(z) = 1 - z\sum_{k=0}^{n-1} a_k\phi_k(z) \tag{4.3}$$

Assim, para $|z| \leq 1$

$$|\phi_n(z)| \leq |\phi_n^*(z)| \leq \prod_{k=0}^{n-1}(1+|a_k|) \leq \prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|) = M$$

Logo

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z)\right| \leq M\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\,, \quad |z| \leq 1.$$

Portanto de (4.3)

$$|D^{-1}(z) - \phi_n^*(z)| = |z|\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\phi_n(z)\right| \leq |z|M\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|\,, \quad |z| \leq 1.$$

Temos então (4.1). Usando um processo análogo ao utilizado no Teorema 2.5 para deduzir (e) obtemos (4.2).

Mostremos que a medida associada é absolutamente contínua. Pode ver-se que

$$\begin{aligned}
&\Omega_n^*(z) = \frac{1}{\omega(z)} + \epsilon \quad \text{com} \quad \epsilon = O(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|) \\
&\omega^{-1}(z) = 1 + z\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\Omega_n(z) \\
&\prod_{k=0}^{\infty}(1-|a_k|) \leq \frac{1}{|\omega(z)|} \leq \prod_{k=0}^{\infty}(1+|a_k|)
\end{aligned}$$

Como $c_0\Re e\frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} = h_n|\phi_n^*(e^{i\theta})|^{-2}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, obtemos $c_0\Re e\frac{D(e^{i\theta})}{\omega(e^{i\theta})} = h|D(e^{i\theta})|^2$. Agora, para $|z| \leq 1$ e quando $|a_n| < 1$ temos

$$F(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{\Omega_n^*(z)}{\phi_n^*(z)} = \frac{D(z)}{\omega(z)}\,, \quad |z| \leq 1$$

Logo $\frac{D(z)}{\omega(z)}$ é uma função contínua em $|z| \leq 1$. ■

OBSERVAÇÃO . Se (a_n) são tais que $|a_n| < 1$ então

$$\lim_{n_\nu\to\infty}\int_0^\theta \frac{h_{n_\nu}}{|\phi_{n_\nu}(e^{it})|^2}dt = \mu(\theta)$$

num conjunto denso de $[0, 2\pi[$. Quando $\sum|a_n|^2 < \infty$ então

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{h_n}}{\phi_n^*(z)} = hD(z)\,, \quad |z| < 1 \text{ a.e. em } [0, 2\pi[.$$

Mas quando $\sum |a_n| < \infty$ então em $[0, 2\pi[$ tem-se

$$\lim_{r \to r^{-1}} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{h_n}}{\phi_n^*(re^{i\theta})} \right\} = hD(e^{i\theta})$$
$$\lim_{r \to r^{-1}} \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{h_n}{|\phi_n^*(re^{i\theta})|^2} \right\} = p(\theta)$$

uniformemente para $|z| \leq 1$.

Vejamos agora algumas fórmulas assimptóticas.

TEOREMA 4.2. *Sejam (a_n) tal que $\sum |a_n| < \infty$. Então para $|x|, |y| < 1$ e $n \to \infty$ temos*

$$\lim_{n\to\infty} K_n(x,y) = \frac{1}{h(1 - x\bar{y})D(x)\overline{D(y)}} \tag{4.4}$$

Para $x = y$, $|x| = 1$ e $n \to \infty$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K_n(x,x)}{n+1} = \frac{1}{h|D(x)|^2}. \tag{4.5}$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta notar que

$$K_n(x,y) = \frac{\phi_n^*(x)\overline{\phi_n^*(y)} - x\bar{y}\phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}}{(1 - x\bar{y})h_n}$$

De (4.1) e (4.2) concluímos que se tem (4.4) e (4.5). ∎

5. Trabalho de Nikishin

Vamos relacionar as funções de Szegő associadas a duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos, uma relativamente à funcional linear $\boldsymbol{u}$, $\{P_n\}$, definida em $[-1, 1]$ por

$$\langle \boldsymbol{u}, x^n \rangle = \int_{-1}^{1} x^n w(x)dx \text{ com } w \in \mathcal{S} \tag{5.1}$$

e outra relativamente a

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{j=1}^{s} M_j \delta_{\lambda_j}\,, \quad \lambda_j \notin [-1, 1] \tag{5.2}$$

que vamos denotar por $\{R_n\}$. Note-se que estas duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos estão na classe de Szegő.

Vamos dar um método para obter fórmulas assimptóticas para $\{R_n\}$ em $[-1, 1]$, $\mathbb{C} \setminus \{[-1, 1] \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}\}$ e em $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Este estudo foi realizado por Nikishin em [**119**] e baseia-se no seguinte resultado devido a Gončar [**62**].

TEOREMA 5.1 (Gončar). *Sejam* $\{P_n\}$ *e* $\{R_n\}$ *as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ *definidas por* (5.1) *e* (5.2), *respectivamente. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{2^s(\varphi(z))^s} \prod_{j=1}^{s} \frac{(\varphi(z)-\varphi(\lambda_j))^2}{z-\lambda_j} \tag{5.3}$$

uniformemente em $\mathbb{C}\setminus\{[-1,1]\cup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}\}$ *e* $\varphi(z) = z+\sqrt{z^2-1}$ *e* $|z|>1$.

OBSERVAÇÃO . As raízes de $\{R_n\}$ estão em $[-1,1]$ com possível excepção de s delas. Estas terão como pontos de acumulação os λ_j com $j = 1,\ldots,s$ (cf. Teorema I.7.1).

Como dissemos atrás, o nosso objectivo vai ser o de encontrar a função de Szegő associada a $\boldsymbol{v}$, que denotaremos por D_v, pois a partir dela e tendo em atenção o Teorema 3.5 podemos determinar as fórmulas assimptóticas destes polinómios em $[-1,1]$ e em $\mathbb{C}\setminus\{[-1,1]\cup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}\}$. No final estudaremos o que se passa em $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}$.

Do Teorema II.6.2 vê-se que

$$\prod_{j=1}^{s}(x-\lambda_j)R_n(x) = P_{n+s}(x) + \sum_{j=1}^{s} d_{n,n+s-j}P_{n+s-j}(x) \tag{5.4}$$

com

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,n+s-j} = d_j\,, \quad j=1,\ldots,s.$$

Assim, de (5.4) obtemos

$$\prod_{j=1}^{s}(z-\lambda_j) = \lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+s}(z)}{R_n(z)} + \sum_{j=1}^{s} d_j \frac{P_{n+s-j}(z)}{R_n(z)}$$

Pelos Teoremas I.7.3 e 5.1 obtemos para $z\in\mathbb{C}\setminus[-1,1]$

$$\prod_{j=1}^{s}(z-\lambda_j) = \frac{(2\varphi(z))^s\prod_{j=1}^{s}(z-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{s}(\varphi(z)-\varphi(\lambda_j))^2}\left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^s$$
$$+\sum_{j=1}^{s} d_j \frac{(2\varphi(z))^s\prod_{j=1}^{s}(z-\lambda_j)}{\prod_{j=1}^{s}(\varphi(z)-\varphi(\lambda_j))^2}\left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^{s-j}$$

e portanto, tomando $\varphi(z)=t$ nesta última equação

$$\prod_{j=1}^{s}(t-\varphi(\lambda_j))^2 = (2t)^s\left(\left(\frac{t}{2}\right)^s + \sum_{j=1}^{s} d_j\left(\frac{t}{2}\right)^{s-j}\right) \tag{5.5}$$

logo os d_j com $j=1,\ldots,s$ estão perfeitamente definidos.

Vamos partir para a determinação da fórmula assimptótica para R_n em $[-1,1]$. Mais uma vez de (5.4) e tendo em atenção o Teorema 3.5

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{s}(\cos(\theta)-\lambda_j)R_n(\cos(\theta)) &= \frac{1}{2^{n+s}}\left(\frac{e^{i(n+s)\theta}}{\overline{D(e^{i\theta})}}+\frac{e^{-i(n+s)\theta}}{D(e^{i\theta})}\right)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{s}d_j\frac{1}{2^{n+s-j}}\left(\frac{e^{i(n+s-j)\theta}}{\overline{D(e^{i\theta})}}+\frac{e^{-i(n+s-j)\theta}}{D(e^{i\theta})}\right)\\ &=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{e^{-in\theta}}{D(e^{i\theta})}\left((\frac{e^{-i\theta}}{2})^s+\sum_{j=1}^{s}d_j(\frac{e^{-i\theta}}{2})^{s-j}\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{e^{in\theta}}{\overline{D(e^{i\theta})}}\left((\frac{e^{i\theta}}{2})^s+\sum_{j=1}^{s}d_j(\frac{e^{i\theta}}{2})^{s-j}\right)\right\}\end{aligned}$$

e por (5.5) obtemos

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{s}(\cos(\theta)-\lambda_j)R_n(\cos(\theta)) &= \frac{1}{2^n}\left\{\frac{e^{-in\theta}}{D(e^{i\theta})}\left(\frac{1}{2e^{-i\theta}}\right)^s\prod_{j=1}^{s}(e^{-i\theta}-\varphi(\lambda_j))^2\right.\\ &\quad\left.+\frac{e^{in\theta}}{\overline{D(e^{i\theta})}}\left(\frac{1}{2e^{i\theta}}\right)^s\prod_{j=1}^{s}(e^{i\theta}-\varphi(\lambda_j))^2\right\}\end{aligned}$$

Então

$$R_n(\cos(\theta))=\frac{1}{2^n}\left\{\frac{\alpha(e^{i\theta})}{D(e^{i\theta})}e^{-in\theta}+\frac{\overline{\alpha(e^{i\theta})}}{\overline{D(e^{i\theta})}}e^{in\theta}\right\}+o(1) \tag{5.6}$$

onde com $z=e^{i\theta}$ e $z_j=\frac{1}{\varphi(\lambda_j)}$ temos o *produto de Blaschke*

$$\alpha(z)=\frac{z^s}{2^s}\frac{\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z_j}\right)^2}{\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{2}\left(z_j+\frac{1}{z_j}\right)\right)}=\prod_{j=1}^{s}\frac{z-z_j}{zz_j-1}\frac{1}{z_j}. \tag{5.7}$$

Estamos em condições de estabelecer o seguinte resultado:

TEOREMA 5.2 (Nikishin). *Sejam $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas às funcionais lineares $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ definidas por* (5.1) *e* (5.2), *respectivamente. Então as funções de Szegő que lhes estão associadas satisfazem*

$$D_{\boldsymbol{v}}(z)=\frac{D_{\boldsymbol{u}}(z)}{\alpha(z)}$$

onde $\alpha(z)$ é definida por (5.7).

Assim sendo, do Teorema 3.5 concluímos que

$$R_n(x)=(z/2)^n(\bar{D}_{\boldsymbol{v}}(1/z))^{-1}+o(1) \tag{5.8}$$

Estudemos agora o comportamento assimptótico de R_n em λ_j. Com esse objectivo considere-se a função

$$\mathcal{G}_n(z) = \langle v, \frac{R_n^2(x)}{z-x}\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta}(1+o(1)) \tag{5.9}$$

Consideremos o domínio $K \subset \mathbb{C}\setminus\{[-1,1]\cup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_s\}\}$; então em K

$$R_n(z)\hat{\boldsymbol{v}}(z) - R_n^{(1)}(z) = \langle \boldsymbol{v}, \frac{R_n(x)}{z-x}\rangle \tag{5.10}$$

onde $\hat{v}(z)$ representa a transformada de Stieltjes de $\boldsymbol{v}$. Mas

$$\mathcal{G}_n(z) = R_n(z)\langle \boldsymbol{v}, \frac{R_n(x)}{z-x}\rangle$$

Assim tendo em atenção (5.9), (5.10) toma a forma

$$R_n(z)\hat{\boldsymbol{v}}(z) - R_n^{(1)}(z) = \frac{1}{R_n(z)}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta}(1+o(1)) \tag{5.11}$$

Agora sabemos que

$$\lim_{z\to\lambda_j}(z-\lambda_j)(R_n(z)\hat{v}(z) - R_n^{(1)}(z)) = M_j R_n(\lambda_j)$$

onde $M_j = \mathrm{Res}_{z=z_j}\,\hat{v}(z)$. Assim de (5.11) obtemos

$$R_n(\lambda_j) = \frac{2}{M_j\pi}\lim_{z\to\lambda_j}(z-\lambda_j)\frac{\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{z-\cos\theta}}{R_n(z)}(1+o(1))$$

e de (5.8) vem que

$$\begin{aligned}
&R_n(\lambda_j)\\
&\quad= \frac{2^{n+1}}{M_j\pi\varphi(\lambda_j)^n}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda_j-\cos\theta}\\
&\qquad\qquad\lim_{s\to\lambda_j}\left(\frac{1}{2}(s+\frac{1}{s}) - \frac{1}{2}(z_j+\frac{1}{z_j})\right)\bar{D}_v(s)(1+o(1))\\
&\quad= \frac{2^{n+1}}{M_j\pi\varphi(\lambda_j)^n}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda_j-\cos\theta}\lim_{s\to\lambda_j}(s-z_j)(1-\frac{1}{sz_j})\bar{D}_v(s)(1+o(1))\\
&\quad= \frac{2^{n+1}}{M_j\pi\varphi(\lambda_j)^n}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda_j-\cos\theta}(1-\frac{1}{z_j^2})\,\mathrm{Res}_{z=z_j}\,\bar{D}_v(z)(1+o(1))
\end{aligned}$$

Assim, como pelo Teorema dos Resíduos

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\lambda_j-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_j^2-1}} = \frac{4\pi}{z_j-\frac{1}{z_j}}$$

estamos em condições de escrever a fórmula assimptótica para R_n em λ_j com $j=1,\ldots,s$

$$R_n\left(\frac{1}{2}\left(z_j+\frac{1}{z_j}\right)\right) = \frac{2^{n+3}z_j^{n-1}}{M_j}\,\mathrm{Res}_{z=z_j}\,\bar{D}_v(z)(1+o(1)). \tag{5.12}$$

Este processo enovador vai ser aplicado, mais tarde, para obter fórmulas assimptóticas para polinómios ortogonais associados a medidas mais gerais.

PARTE B

Generalizações dos Polinómios Ortogonais Clássicos

CAPÍTULO IV

Dois Trabalhos do Professor Vicente Gonçalves

1. Introdução **81**

2. Teorema de Bochner e Suas Consequências **84**

3. Discussão da Equação de Pearson **88**

4. Fórmula de Rodrigues **90**

5. Caracterizações **92**

6. Interpretação Electrostática das Raízes dos Polinómios Ortogonais Clássicos **95**

7. Caso Não-Homogéneo **97**

8. Estudo Completo da Equação Diferencial **100**

8.1 Estudo do caso $\mathcal{H}_n$ **100**

8.2 Estudo do caso $\mathcal{L}_n^{\alpha}$ **101**

8.3 Estudo do caso $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$ **102**

8.4 Caso singular **107**

1. Introdução

O nosso objectivo, neste Capítulo vai ser o de mostrar que a equação diferencial de segunda ordem do tipo

$$\left.\begin{aligned}
&L_nP_n = 0\\
&L_n = \phi D^2 + \psi D + \lambda_n I\\
&\phi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2\\
&\psi(x) = b_0x + b_1\\
&\lambda_n = n((n-1)a_0 + b_0)\\
&D^k \text{ é a derivada de ordem } k \text{ e } D^0 = I
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

caracteriza completamente as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas. Com isto queremos dizer que, a partir dela, e conhecendo as suas soluções polinomiais, podemos determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos que estes polinómios verificam, a localização dos seus zeros, bem como a medida que lhes está associada.

O estudo das soluções polinomiais da equação (1.1) foi realizado por Bochner em [**16**], daí que este operador leve o seu nome.

Vamos ver como, a partir desta caracterização das famílias de polinómios ortogonais clássicas, podemos obter as caracterizações por nós apresentadas em [**26**].

O estudo das soluções polinomiais de (1.1), realizado por Bochner, está baseado no facto de (1.1) ser uma equação diferencial do tipo hipergeométrico. Identificando as soluções polinomiais com a sua representação em termos de funções hipergeométricas encontrou os polinómios de Hermite, Laguerre e Jacobi. Assim sendo, o processo utilizado por Bochner é exaustivo; além disso não nos dá uma ligação directa com os coeficientes da relação de recorrência a três termos que sabemos verificarem estes polinómios.

Daqui se vê a importância do primeiro trabalho realizado nesta teoria por Vicente Gonçalves em [**60**]. De facto, Vicente Gonçalves mostra que as soluções polinomiais de (1.1), $\{P_n\}$, verificam uma relação de recorrência a três termos

$$xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}\,, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.2}$$

com condições iniciais $P_0 = 1$, $P_1 = x - \beta_0$. Por aplicação directa do Teorema de Favard, concluímos que a sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$, definida por (1.1) é ortogonal quando e só quando $\gamma_n \neq 0$.

Vamos descrever o método apresentado por Vicente Gonçalves em [**60**] para obter uma fórmula para β_n, γ_n dada em termos dos coeficientes dos polinómios ϕ, ψ que aparecem em (1.1).

Devemos realçar que o estudo realizado por este autor nos leva a duas situações que podemos chamar de singulares:

- Provou que algumas soluções polinomiais verificam (1.2) somente para um número finito de índices, digamos para $n = 1, 2, \ldots, m$. Estes polinómios foram estudados por Romanovsky em [**129**].
- Deu também condições sobre os coeficientes de ϕ, ψ por forma que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_{n_0} = 0$. Neste caso Vicente Gonçalves diz-nos que não existe uma medida a respeito da qual a sucessão $\{P_n\}$ seja ortogonal.

Um estudo da equação de Bessel pode também aí ser encontrado. Desta forma Vicente Gonçalves antecipou o estudo sobre os polinómios de Bessel realizado por Krall e Frink em [**81**].

Nesse trabalho Vicente Gonçalves mostra que se $\{P_n\}$ está definida por (1.1) então verifica

$$2\phi P_n' + \psi P_n - (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)P_n = K_n P_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.3}$$

Esta representação para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas é usualmente atribuída a Tricomi [**145, 146**]. Mais uma vez não necessitamos da ortogonalidade da sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$ para obter (1.3). Veremos também (cf. Teorema 2.2) que (1.3), juntamente com (1.2), nos leva a (1.1). Mostramos, assim, que o método que Vicente Gonçalves apresentou em [**60**] serve para demonstrar a caracterização de Al-Salam e Chihara [**5**].

Um ano mais tarde Vicente Gonçalves apresentou, em [**61**], uma fórmula tipo Rodrigues para as soluções polinomiais de (1.1). O estudo aí realizado é tão simples que parece estranho que a ninguém tivesse ocorrido fazer uma tal demonstração. Diz-nos também como obter a equação diferencial tipo Bochner para $\{y'_{n+1}\}$, i.e. deu uma demonstração do Teorema de Hahn [**68**] via fórmula de Rodrigues, i.e. provou que as únicas sucessões de polinómios ortogonais mónicos, $\{P_n\}$, cuja sucessão de polinómios mónicos, $\{\frac{y'_{n+1}}{n+1}\}$, é ainda ortogonal são as clássicas.

Queríamos deixar claro que muitos trabalhos foram escritos sobre as MOPSs clássicas, mas normalmente os autores utilizaram sempre como dado inicial que as sucessões de polinómios mónicos soluções de (1.1) são ortogonais, o que enfraquece, como se depreende do acima referido, os resultados por eles encontrados. Sobre este tema podemos encontrar uma extensa bibliografia no trabalho de Al-Salam [**4**] ou em [**26**].

Apenas existe um trabalho, devido a Lancaster [**84**], semelhante ao realizado por Vicente Gonçalves em [**60**], mas para o caso em que em vez de um operador diferencial tipo Bochner, consideramos o análogo discreto desse operador.

Neste capítulo apresentaremos os trabalhos de Vicente Gonçalves [**60, 61**] e aproveitaremos os resultados aí contidos para fazermos um estudo da regularidade das funcionais lineares que verificam uma equação de Pearson tomada no sentido distribucional, i.e.

$$\boldsymbol{u} \quad \text{tal que} \quad D(\phi \boldsymbol{u}) = \psi \boldsymbol{u}\,. \tag{1.4}$$

Este estudo foi realizado por Branquinho e Marcellán em [**23**] e pretende estender o estudo apresentado em [**26**].

Daremos também algumas caracterizações dos polinómios ortogonais clássicos por nós apresentadas em [**20, 26**].

Veremos também uma interessante interpretação electrostática das raízes dos polinómios ortogonais apresentado por Stieltjes em [**141**].

Vamos, inspirados nos trabalhos de Vicente Gonçalves [**60, 61**], estudar também sucessões de polinómios ortogonais mónicos, $\{P_n\}$, que verificam uma relação do tipo

$$\left(\Phi D^2 + \Psi D + \mu_n I\right) P^{(1)}_{n-1} = 2kP'_n \tag{1.5}$$

onde $\Phi \in \mathbb{P}_2$, $\Psi \in \mathbb{P}_1$ e $\mu_n \in \mathbb{C}$. Este estudo foi realizado por Branquinho e Foulquié Moreno em [**21**].

As sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas verificam uma relação deste tipo (cf. Teorema 7.1).

Mostraremos ainda que (1.5) é mais geral que (1.1).

Para resolver este problema vamos começar por determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos que os $\{P_n\}$ definidos por (1.5) verificam. Depois, classificá-los-emos em quatro classes, $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{L}_n^{\alpha}$, $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$, $\mathcal{B}_n^{\alpha}$, por analogia com o caso clássico. Determinaremos a medida associada as estas sucessões de polinómios ortogonais mónicos:

- No caso $\mathcal{H}_n$ obtemos por inversão da transformada de Stieltjes a medida correspondente.
- Nos casos $\mathcal{L}_n^{\alpha}$ e $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$ obtemos condições sobre β_0, γ_1 por forma a termos as igualdades $(L_n^a)^{(c)} = \mathcal{L}_n^{\alpha}$ ou $\left(P_n^{a,b}\right)^{(c)} = \mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$, onde $(L_n^a)^{(c)}$ e $\left(P_n^{a,b}\right)^{(c)}$ são os polinómios associados a L_n^a e $P_n^{a,b}$, respectivamente. Neste processo utilizaremos as medidas obtidos por Wimp, Askey, e Bustoz e Ismail para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas das clássicas (veja-se [**11, 30, 151**]).

Como caso singular deste problema ($\Phi = 0$) estudamos sucessões de polinómios ortogonais mónicos, $\{P_n\}$, que satisfazem

$$P_n = P_n^{(1)} + a_n P_{n-1}^{(1)}.$$

Um problema deste tipo foi estudado por Branquinho e Marcellán em [**24**] mas utilizando outra argumentos.

2. Teorema de Bochner e Suas Consequências

Comecemos por definir

$$E_{i,\xi}^n = a_i\xi(\xi-1) + b_i\xi - \lambda_{i,n}$$

onde a_i, b_i são os mesmos de (1.1) e $\lambda_{i,n} = \lambda_n\delta_{i,0}$ com $\delta_{i,0}$ símbolo de Kronecker. Assim, de [**23**], temos:

TEOREMA 2.1. *Para cada n, temos unicidade da solução de* (1.1)*, se e somente se*

(a) $E_{0,\xi}^n = 0$ *tem $\xi = n$ como única solução em $\mathbb{N}$;*

(b) $E_{0,k}^n \neq 0$*, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Além disso, as soluções polinomiais mónicas, $P_n = x^n + p_{1,n}x^{n-1} + p_{2,n}x^{n-2} + \ldots$, *de* (1.1) *verificando (a) e (b), satisfazem a relação de recorrência a três termos*

$$xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$
$$P_0 = 1\,, \quad P_1 = x - \beta_0.$$

onde

$$\begin{cases} \beta_n = \dfrac{(2a_0 - b_0)b_1 - n((n-1)a_0 + b_0)a_1}{(2na_0 + b_0)(2(n-1)a_0 + b_0)} \\ \gamma_{n+1} = \dfrac{n + 4a_0 \frac{E^{n+1}_{1,n} E^{n+1}_{1,n+1} + E^{n+1}_{2,n+1} E^{n+1}_{0,n}}{E^{n+1}_{0,n-1} E^{n+1}_{0,n}} + 2\phi(\frac{E^{n+1}_{1,n+1}}{E^{n+1}_{0,n}})}{\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n+2}} \end{cases} \tag{2.1}$$

DEMONSTRAÇÃO. Se P_n verifica (1.1) então obtemos o seguinte sistema de n equações a n incógnitas $p_{i,n}$:

$$\begin{cases} p_{1,n}E^n_{0,n-1} + E^n_{1,n} = 0 \\ p_{2,n}E^n_{0,n-2} + p_{1,n}E^n_{1,n-1} + E^n_{2,n} = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ p_{n,n}E^n_{0,0} + p_{n-1,n}E^n_{1,1} + p_{n-2,n}E^n_{2,2} = 0 \end{cases}$$

A unicidade sai directamente de $E^n_{0,k} \neq 0$ para $k \in \mathbb{N}$.

A segunda parte da demonstração vai ser feita em três etapas:

(1) Calculamos $u_n(x) = L_{n+1}((x - \beta_n)P_n)$.

(2) Provamos que $u_n(x) = K_n P_{n-1}(x)$.

(3) Determinamos γ_n tal que $L_{n+1}((x - \beta_n)P_n - P_{n+1} - \gamma_n P_{n-1}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. De facto,

$$\gamma_{n+1} = \frac{K_{n+1}}{\lambda_{0,n} - \lambda_{0,n+2}}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

(1). Pode ver-se que

$$u_n(x) = 2\phi P'_n + \psi P_n - (2a_0 n + b_0)(x - \beta_n)P_n. \tag{2.3}$$

Se compararmos os coeficientes de P_n obtemos uma nova representação para u_n:

$$\begin{aligned} u_n(x) = ((2a_0 n + b_0)\beta_n + (b_1 + 2a_1 n) - 2a_0 p_{1,n})x^n \\ + (-4a_0 p_{2,n} + ((2a_0 n + b_0)\beta_n + b_1 + 2a_1(n-1))p_{1,n})x^{n-1} + \ldots \end{aligned}$$

Se obrigarmos u_n a ser um polinómio de grau exactamente $n-1$ vem que

$$\beta_n = \frac{2a_0p_{1,n} - (b_1 + 2a_1n)}{2a_0n + b_0}$$
$$u_n = 2(-2a_0p_{2,n} + (a_0p_{1,n} - a_1)p_{1,n} + 2a_2n)x^{n-1} + \dots$$

(2). Como u_n é um polinómio de grau $n-1$ que admite a representação (2.3), é suficiente provar que

$$L_{n-1}(2\phi P_n' + \psi P_n - (2a_0n + b_0)(x - \beta_n)P_n) = 0$$

para concluirmos pela unicidade da solução mónica de (1.1) que

$$u_n(x) = K_nP_{n-1}(x).$$

Mas,

$$L_{n-1}(u_n) = ((-2a_0 + b_0)b_1 + na_1((n-1)a_0 + b_0) \\ + (2a_0n + b_0)(2a_0(n-1) + b_0)\beta_n)P_n$$

e u_n é um polinómio de grau $n-1$ logo $\operatorname{gr} L_{n-1}(u_n) \leq n-1$, pois $E^n_{0,n} = 0$. Assim, o segundo membro desta equação é identicamente nulo. Daqui obtemos também a expressão desejada para os coeficientes β_n. Da primeira parte da demonstração concluímos que existem $K_n \in \mathbb{R}$ tais que $u_n = K_nP_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

De (2.3) obtemos

$$K_{n+1} = -4a_0p_{2,n+1} + ((2a_0(n+1) + b_0)\beta_{n+1} + b_1 + 2a_1n)p_{1,n+1}$$

e de (2.2) obtemos a representação para γ_{n+1}. ∎

Vamos ver agora uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos que sai praticamente da demonstração que acabámos de apresentar. Esta antecipa por um lado a representação de Tricomi dada em [**145**] e por outro a caracterização dada por Al-Salam e Chihara em [**5**].

TEOREMA 2.2. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios mónicos que é solução de* (1.1). *Então $\{P_n\}$ admite a representação de Tricomi,* (1.3). *Além disso, se $\{P_n\}$ verifica* (1.2) *e* (1.3), *então também verifica* (1.1).

DEMONSTRAÇÃO. A implicação (1.1) $\Longrightarrow$ (1.3) é consequência directa de (2.3). Para demonstrar o recíproco, vamos derivar duas vezes (1.2), i.e.

$$0 = P_{n+1} - (x - \beta_n)P_n + \gamma_n P_{n-1} \tag{2.4}$$

$$P_n = P'_{n+1} - (x - \beta_n)P'_n + \gamma_n P'_{n-1} \tag{2.5}$$

$$2P'_n = P''_{n+1} - (x - \beta_n)P''_n + \gamma_n P''_{n-1} \tag{2.6}$$

Multiplicando (2.4) por λ_{n+1}, (2.5) por ψ e (2.6) por ϕ e somando ordenadamente, obtemos

$$\begin{aligned} 2\phi P'_n + \psi P_n = -(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(x - \beta_n)P_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1})\gamma_n P_{n-1} \\ + L_{n+1}P_{n+1} + L_n P_n + L_{n-1}P_{n-1} \end{aligned}$$

e de (1.3) temos que

$$L_{n+1}P_{n+1} + L_n P_n + L_{n-1}P_{n-1} = 0.$$

Por comparação dos graus dos polinómios vê-se que $L_{n+1}P_{n+1} = 0$, i.e. $\{P_n\}$ verifica (1.1). ■

Vejamos que informação podemos retirar do facto das sucessões de polinómios mónicos $\{P_n\}$ verificarem (1.1). Mostraremos na Secção 5 que as relações que aqui vamos encontrar caracterizam as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas.

COROLÁRIO IV.1. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios mónicos que verifica* (1.1) *então $\{\frac{P'_n}{n}\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos.*

DEMONSTRAÇÃO. Derivando (1.1) obtemos

$$\phi(P'_n)'' + (2\phi' + \psi)(P'_n)' + (\lambda_n + \phi'' + \psi')P'_n = 0$$

e do Teorema 2.1 concluímos a demonstração. ■

Da mesma forma se pode ver que $\{\frac{P^{(k)}_{n+k}}{(n+1)_k}\}$ verifica uma relação de recorrência a três termos sempre que $\{P_n\}$ satisfaça (1.1).

Vejamos outra representação para as sucessões de polinómios mónicos que verificam (1.1).

COROLÁRIO IV.2. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios mónicos que verifica* (1.1) *então existem $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tais que*

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + a_n \frac{P'_n}{n} + b_n \frac{P'_{n-1}}{n-1} \tag{2.7}$$

DEMONSTRAÇÃO. De (2.5) e tendo em atenção que $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ verifica a relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &x\frac{P'_{n+1}}{n+1} = \frac{P'_{n+2}}{n+2} + \beta'_n \frac{P'_{n+1}}{n+1} + \gamma'_n \frac{P'_n}{n}\,, \quad n = 1, 2, \dots \\ &\frac{P'_1}{1} = 1\,, \quad \frac{P'_2}{2} = x - \beta'_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

concluímos que se tem (2.7) com $a_n = n(\beta_n - \beta'_n)$ e $b_n = (n-1)\gamma_n - n\gamma'_{n-1}$. ■

Vamos ver agora uma representação para as sucessões de polinómios mónicos que verificam (1.1) e que foi apresentada por McCarthy em [**108**].

COROLÁRIO IV.3. *Se* $\{P_n\}$ *é uma sucessão de polinómios mónicos que verifica* (1.1) *então*

$$\begin{aligned} 2\phi(P'_{n+1}P_n - P_{n+1}P'_n) &= (\lambda_n - \lambda_{n+2})\gamma_{n+1}P_n^2 + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})P_{n+1}^2 \\ &+ ((x-\beta_n)(2\lambda_{n+1} - \lambda_n - \lambda_{n-1}) - (x - \beta_{n+1})(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}))P_nP_{n+1} \end{aligned} \tag{2.9}$$

DEMONSTRAÇÃO. Do Teorema 2.2 sabemos que $\{P_n\}$ verifica (1.3). Assim, escrevendo (1.3) com $n+1$ em vez de n obtemos

$$\begin{aligned} &2\phi P'_{n+1} + \psi P_{n+1} \\ &\qquad = -(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})(x - \beta_{n+1})P_{n+1} + (\lambda_n - \lambda_{n+2})\gamma_{n+1}P_n \end{aligned} \tag{2.10}$$

e aplicando a relação de recorrência a três termos (1.2) a (1.3) temos

$$2\phi P'_n + \psi P_n = -(2\lambda_{n+1} - \lambda_n - \lambda_{n-1})(x - \beta_n)P_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_{n-1})P_{n+1} \tag{2.11}$$

Agora, multiplicando (2.10) por P_n e (2.11) por P_{n+1}, subtraindo a segunda da primeira equação obtida, concluímos que se tem (2.9). ■

3. Discussão da Equação de Pearson

Vimos no Teorema 2.1 que uma sucessão de polinómios mónicos, $\{P_n\}$, que verifique (1.1) está definida pela relação de recorrência a três termos (1.2) com coeficientes β_n, γ_n definidos por (2.1). Da representação de γ_n e da alínea (d) do Teorema I.2.1 sabemos que uma condição necessária e suficiente para que $\{P_n\}$ seja ortogonal é que

$$\frac{n}{2} + 2a_0 \frac{E^{n+1}_{1,n}E^{n+1}_{1,n+1} + E^{n+1}_{2,n+1}E^{n+1}_{0,n}}{E^{n+1}_{0,n-1}E^{n+1}_{0,n}} + \phi\left(\frac{E^{n+1}_{1,n+1}}{E^{n+1}_{0,n}}\right) \neq 0 \tag{3.1}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Vejamos como determinar a medida a respeito da qual $\{P_n\}$ é ortogonal, i.e.

$$\text{determinar} \quad w \quad \text{tal que} \quad \int P_n P_m w dx = \kappa_n \delta_{n,m}.$$

De (1.1) obtemos sucessivamente

$$\int (\phi P_n'' + \psi P_n' + \lambda_n P_n) w dx = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$\int ((\phi w)' - \psi w) P_n' dx = \phi w P_n' \Big]_a^b\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Supondo que supp w é compacto ou que $\lim_{n\to\infty} \phi w = 0$ obtemos que w verifica a equação de Pearson (I.5.1), i.e.

$$(\phi w)' = \psi w$$

pois $\{P_n'\}$ é uma família livre de polinómios — e portanto $\{P_n\}$ é uma das famílias clássicas.

Vejamos que se tem o recíproco, i.e. que se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios mónicos ortogonal relativamente a uma medida que verifica a equação de Pearson (I.5.1) — é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica — então $\{P_n\}$ verifica a equação de Bochner (1.1).

Pelo Teorema 2.2 vemos que necessitamos somente mostrar que $\{P_n\}$ verifica (1.3). Assim, consideremos a representação

$$\phi P_n' + \psi P_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k$$

onde

$$\begin{aligned} a_{n,k} \int P_k^2 w dx & \\ &= \int (\phi P_n' + \psi P_n) P_k w dx \\ &= -\int \phi P_n P_k' w dx \quad \text{pois} \quad P_n' P_k = (P_n P_k)' - P_n P_k' \\ &= 0\,, \quad k + 2 - 1 < n. \end{aligned}$$

Temos

$$\phi P_n' + \psi P_n = \sum_{k=n-1}^{n+1} a_{n,k} P_k$$

e, aplicando a relação de recorrência a três termos (1.2) que $\{P_n\}$ verifica, obtemos (1.3).

Podemos então enunciar:

TEOREMA 3.1. *Uma sucessão de polinómios mónicos* $\{P_n\}$ *definida à custa do operador de Bochner* (1.1) *é clássica se e somente se os coeficientes de* ϕ, ψ *verificam* (3.1).

OBSERVAÇÃO . A condição (3.1) dá-nos um critério para a regularidade de uma funcional linear que seja solução da equação de Pearson, dada unicamente em termos dos coeficientes de ϕ, ψ.

4. Fórmula de Rodrigues

Vamos apresentar, de seguida, a técnica apresentada por Vicente Gonçalves em [**61**] para obter uma fórmula tipo Rodrigues para as soluções polinomiais de (1.1).

TEOREMA 4.1. *As soluções polinomiais,* $\{P_n\}$*, de* (1.1) *são representadas por*

$$P_n(x) = \frac{D^n\left(w(x)\phi^n(x)\left(c_1 + \int_{x_0}^x \frac{N(t)}{w(t)\phi^{n-1}(t)}dt\right)\right)}{w(x)}$$

onde w *é a função definida por*

$$(\phi(x)w(x))' = \psi(x)w(x)$$

c_1 *é uma constante real e* $N \in \mathbb{P}_n$.

DEMONSTRAÇÃO. Vê-se facilmente que w admite a seguinte representação integral

$$w(x) = \frac{\exp(\int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{\phi(t)}dt)}{\phi(x)}.$$

Se multiplicarmos (1.1) por w

$$(\exp(A(x))y')' + \lambda_n \frac{\exp(A(x))}{\phi(x)} y = 0$$

onde $A(x) = \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{\phi(t)}dt$. Agora, usando a igualdade $\exp(A(x))y = \phi(x)z$, obtemos sucessivamente,

$$(\phi z)'' - (\psi z)' + \lambda_n z = 0$$

$$\phi z'' + (2\phi' - \psi)z' + (\phi'' - \psi' + \lambda_n)z = 0 \tag{4.1}$$

Tomemos agora $z = v^{(n)}$, i.e.

$$\phi v^{(n+2)} + (2\phi' - \psi)v^{(n+1)} + (\phi'' - \psi' + \lambda_n)v^{(n)} = 0$$

e procuremos a equação diferencial de segunda ordem cuja derivada de ordem n coincida com a última equação. Assim,

$$\phi v'' + (2\phi' - \psi - n\phi')v' + (\phi'' - \psi' + \lambda_n - n((n+1)a_0 + (4a_0 - b_0)))v = N'$$

onde $\operatorname{gr} N \leq n$. Donde se obtem sucessivamente

$$\phi v'' + \phi' v' + ((1-n)\phi' - \psi)v' + ((1-n)\phi' - \psi)' v = N'$$
$$(\phi v')' + (((1-n)\phi' - \psi)v)' = N'$$
$$\phi v' + ((1-n)\phi' - \psi)v = N$$

Portanto

$$v = w(x)\phi^n(x)\left(c_1 + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w(t)\phi^{n-1}(t)} dt\right)$$
$$z = D^n\left(w(x)\phi^n(x)\left(c_1 + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w(t)\phi^{n-1}(t)} dt\right)\right)$$
$$y = \frac{D^n\left(w(x)\phi^n(x)\left(c_1 + \int_{x_0}^{x} \frac{N(t)}{w(t)\phi^{n-1}(t)} dt\right)\right)}{w(x)} \tag{4.2}$$

Se tomarmos $N \equiv 0$ e $c_1 = 1$ em (4.2) obtemos

$$y = \frac{D^n\left(w(x)\phi^n(x)\right)}{w(x)}$$

que é a fórmula de Rodrigues para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas. ■

OBSERVAÇÃO . Esta técnica pode ser aplicada mesmo quando a funcional linear $\boldsymbol{u}$ solução da equação de Pearson não é regular. Assim, obtemos a fórmula de Rodrigues para os casos singulares L_n^α, com $\alpha = -1, -2, \ldots$, $P_n^{\alpha,\beta}$, com $\alpha, \beta = -1, -2, \ldots$, B_n^α, com $\alpha = -1, -2, \ldots$ e para os polinómios de Romanovsky.

5. Caracterizações

Vejamos que se tem o recíproco dos Corolários IV.1, IV.2, IV.3.

TEOREMA 5.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$; $\{P_n\}$ é clássica se e somente se $\left\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\right\}$ é ortogonal.*

DEMONSTRAÇÃO. Do Corolário IV.1 e do Teorema 3.1 obtemos que a condição é necessária.

Suponhamos agora que $\left\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\right\}$ é ortogonal relativamente à funcional linear $\boldsymbol{v}$ então da equação (I.2.2) com $n = 0$ obtemos

$$D\boldsymbol{v} = \psi \boldsymbol{u} \quad \text{onde} \quad \psi = \frac{v_0 P_1}{\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle}. \tag{5.1}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{u}, P_n \rangle \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{v}, (xP_n)' - xP_n' \rangle \\
&\qquad = -\langle D\boldsymbol{v}, xP_n \rangle - n \langle \boldsymbol{v}, x\frac{P_n'}{n} \rangle \\
&\qquad = 0, \quad n > 2
\end{aligned}$$

e portanto como $\boldsymbol{v}$ se pode escrever na base $\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{P_n \boldsymbol{u}}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2 \rangle}$ como mostra (I.2.1) temos

$$\boldsymbol{v} = \left(\langle \boldsymbol{v}, P_0 \rangle \frac{P_0}{\langle \boldsymbol{u}, P_0^2 \rangle} + \langle \boldsymbol{v}, P_1 \rangle \frac{P_1}{\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle} + \langle \boldsymbol{v}, P_2 \rangle \frac{P_2}{\langle \boldsymbol{u}, P_2^2 \rangle} \right) \boldsymbol{u}. \tag{5.2}$$

De (5.1) e (5.2) obtemos que $\boldsymbol{v}$ verifica uma equação tipo Pearson com $\psi = \frac{v_0 P_1}{\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle}$ e $\phi = \langle \boldsymbol{v}, P_0 \rangle \frac{P_0}{\langle \boldsymbol{u}, P_0^2 \rangle} + \langle \boldsymbol{v}, P_1 \rangle \frac{P_1}{\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle} + \langle \boldsymbol{v}, P_2 \rangle \frac{P_2}{\langle \boldsymbol{u}, P_2^2 \rangle}$. ■

Em [**26**] apresentamos uma nova caracterização destas sucessões de polinómios ortogonais mónicos:

TEOREMA 5.2. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. Uma condição necessária e suficiente para que $\{P_n\}$ pertença a uma das famílias clássicas é que*

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + a_{n,n} \frac{P'_n}{n} + a_{n,n-1} \frac{P'_{n-1}}{n-1}, \quad n \geq 2$$

com $a_{n,n-1} \neq (n-1)\gamma_n$ para $n \geq 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Como $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos

$$xP_n(x) = P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$P_0(x) = 1\,, \quad P_1(x) = x - \beta_0.$$

Assim, tomando derivadas obtemos

$$P_n = P'_{n+1} + \beta_n P'_n + \gamma_n P'_{n-1} - xP'_n$$

Agora, consideremos

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \frac{P'_k}{k}$$

e substituindo P_n da equação anterior por esta expressão vem

$$x\frac{P'_n}{n} = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + (\beta_n - \frac{a_{n,n}}{n})\frac{P'_n}{n} + \frac{(n-1)\gamma_n - a_{n,n-1}}{n}\frac{P'_{n-1}}{n-1} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-2} a_{n,k}\frac{P'_k}{k}$$

Portanto, $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ é ortogonal se e somente se

$a_{n,k} = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, n-2$

$a_{n,n-1} \neq (n-1)\gamma_n$, para $k = 2, \ldots$

Que era o que pretendíamos demonstrar. ■

OBSERVAÇÃO . Este teorema foi enunciado pelos autores em [**26**] sem restrições nos parâmetros $a_{n,k}$ da relação de estrutura. Esta condição reveste-se de carácter fundamental nos casos Jacobi e Bessel.

Como consequência do teorema anterior podemos dizer:

COROLÁRIO IV.4. *Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica e $(\beta_n), (\gamma_n)$ os coeficientes da relação de recorrência a três termos,* (1.2)*, que esta sucessão de polinómios ortogonais mónicos verifica. Se denotamos por $(\beta'_n), (\gamma'_n)$ os coeficientes da relação de recorrência a três termos que $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ verifica, i.e.*

$$x\frac{P'_{n+1}}{n+1} = \frac{P'_{n+2}}{n+2} + \beta'_n \frac{P'_{n+1}}{n+1} + \gamma'_n \frac{P'_n}{n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$\frac{P'_1}{1} = 1\,, \quad \frac{P'_2}{2} = x - \beta'_0.$$

P_n	$a_{n+1,n+1}$	$a_{n+2,n+1}$
H_n	0	0
L_n^α	$n+1$	0
$P_n^{\alpha,\beta}$	$\frac{2(\alpha-\beta)(1+n)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+4)}$	$\frac{4(n+1)(n+2)(n+\alpha+2)(n+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+3)(2n+\alpha+\beta+4)^2(2n+\alpha+\beta+5)}$
B_n^α	$\frac{4(n+1)}{(2n+\alpha+2)(2n+\alpha+4)}$	$\frac{-4(n+1)(n+2)}{(2n+\alpha+3)(2n+\alpha+4)^2(2n+\alpha+5)}$

TABELA 1. Clássicos (D)

então

$$a_{n+1,n+1} = (n+1)(\beta_{n+1} - \beta'_{n+1}) \tag{5.3}$$

$$a_{n+2,n+1} = (n+1)\gamma_{n+2} - (n+2)\gamma'_{n+1} \tag{5.4}$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Agora, como $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente a ϕu, onde ϕ está definido na Tabela 1, podemos calcular

$$a_{n+1,n+1} \quad \text{e} \quad a_{n+2,n+1}$$

a partir de (5.3), (5.4) e Tabela 3, e o resultado encontra-se na Tabela 1.

Para vermos que (2.9) caracteriza as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas basta factorizá-la da seguinte forma

$$\begin{aligned}&(2\phi P'_{n+1} - (\lambda_n - \lambda_{n+2})\gamma_{n+1}P_n + (x-\beta_{n+1})(\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})P_{n+1})P_n \\ &= (2\phi P'_n + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n+1})P_{n+1} + (x-\beta_n)(2\lambda_{n+1} - \lambda_n - \lambda_{n-1})P_n)P_{n+1}\end{aligned} \tag{5.5}$$

e como P_n, P_{n+1} não têm raízes em comum concluímos que $\{P_n\}$ verifica uma relação do tipo (1.3). Podemos então enunciar:

TEOREMA 5.3. *Seja* $\{P_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos; então* $\{P_n\}$ *é clássica se e somente se verifica* (2.9).

6. Interpretação Electrostática das Raízes dos Polinómios Ortogonais Clássicos

Stieltjes [**139, 140, 141**] apresentou uma interessante interpretação das raízes dos polinómios de Jacobi, Laguerre e Hermite na resolução do seguinte:

PROBLEMA IV.1. *Suponhamos que temos n cargas unitárias distribuídas pelos pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $]a,b[$ ou num qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$. A expressão*

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1\le i<j\le n} |x_i - x_j| \tag{6.1}$$

é chamada discriminante de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se as cargas se repelem segundo a lei do potencial logarítmo, então

$$-\log D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1\le i<j\le n} \log \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

é a energia do sistema de cargas electrostáticas e o mínimo desta expressão dános o equilíbrio electrostático. Os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ onde o mínimo é atingido corresponde ao estado de equilíbrio do sistema, em que não há trocas de cargas entre os pontos.

Estudemos o caso em que as n cargas estão situadas em $]-1,1[$. Acrescentemos duas cargas mais, $p > 0$ em $+1$ e $q > 0$ em -1. Então a energia electrostática do sistema é descrita por

$$L = -\log D(x_1, x_2, \ldots, x_n) + p\sum_{j=1}^{n} \log \frac{1}{|1 - x_j|} + q\sum_{j=1}^{n} \log \frac{1}{|1 + x_j|}\,, \tag{6.2}$$

onde D está definida por (6.1). Stieltjes demonstrou o seguinte resultado:

TEOREMA 6.1. *O mínimo da função L é atingido quando $x_1, \ldots, x_n$ são as raízes dos polinómios de Jacobi $P_n^{2p-1,2q-1}$.*

DEMONSTRAÇÃO. É evidente que o mínimo será atingido para pontos $x_j \neq \pm 1$, $j = 1, \ldots, n$. Para calcular o mínimo temos somente que tomar $\partial L/\partial x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, logo

$$\sum_{\substack{1\le j\le k\\ j\neq k}} \frac{1}{x_j - x_k} - \frac{p}{x_k - 1} + \frac{q}{x_k + 1} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6.3}$$

Tome-se $P_n(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$ então (6.3) é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{P_n''(x_k)}{P_n'(x_k)} + \frac{p}{x_k - 1} - \frac{q}{x_k + 1} = 0\,, \quad k = 1, \ldots, n$$

i.e. o polinómio

$$(1 - x^2)P_n''(x) + 2(q - p - (p + q)x)P_n'(x)$$

anula-se nos pontos x_k, e como é de grau n tem que ser um múltiplo de P_n. Assim, temos depois de compararmos o coeficiente do termo de maior ordem do polinómio anterior

$$(1-x^2)P_n''(x) + 2(q-p-(p+q)x)P_n'(x) = -n(n+2(p+q)-1)P_n(x)$$

que é a equação diferencial satisfeita pelos polinómios de Jacobi de parâmetros $2p-1, 2q-1$, respectivamente. ■

Uma interpretação semelhante existe para as raízes dos polinómios de Hermite e Laguerre. De facto, suponhamos primeiro que consideramos n cargas unitárias distribuídas em $]0,\infty[$ e acrescentamos uma carga p na origem. De forma a prevenir que as cargas possam deslocar-se para ∞ vamos impôr condições sobre o centro de massa

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq K\,, \quad K \geq 0. \tag{6.4}$$

A energia vem agora definida pela expressão

$$L = -\log D(x_1, x_2, \ldots, x_n) + p\sum_{j=1}^{n} \log\frac{1}{|x_j|} \tag{6.5}$$

Podemos enunciar o seguinte resultado:

TEOREMA 6.2. *A função L definida por* (6.5) *sugeita à condição* (6.4) *é mínima quando $x_1, \ldots, x_n$ são tomados nas raízes dos polinómios de Laguerre $L_n^{2p-1}(c_n x)$, onde $c_n = (n+2p-1)/K$.*

Se considerarmos que as cargas unitárias estão distribuídas em $\mathbb{R}$ sugeitas a que o momento de massa satisfaça

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq L \tag{6.6}$$

então:

TEOREMA 6.3. *A função $-\log D(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sugeita à condição* (6.6) *atinge o seu mínimo quando os pontos $x_1, \ldots, x_n$ são tomados nas raízes dos polinómios de Hermite $H_n(d_n x)$, onde $d_n = \sqrt{(n-1)/2L}$.*

7. Caso Não-Homogéneo

Comecemos por ver que as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas verificam uma relação do tipo (1.5).

TEOREMA 7.1. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica então verifica* (1.5) *que, em notação operacional, toma a forma*

$$L_n^* P_{n-1}^{(1)}(x) = 2(a_0 - b_0)P_n'(x) \tag{7.1}$$

onde

$$L_n^* = \phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I.$$

e ϕ, ψ, λ_n vêm da equação (1.1).

DEMONSTRAÇÃO. Como $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica, sabemos que

$$q_n(x) = \frac{1}{\int_I w(t)dt} \int_I \frac{P_n(t)}{x-t} w(t)dt$$

verifica (4.1) e como $q_n(x) = -P_{n-1}^{(1)}(x) + q_0(x)P_n(x)$ vemos que $\{P_n\}$ verifica

$$(\phi D^2 + (2\phi' - \psi)D + (\lambda_n + \phi'' - \psi')I)P_{n-1}^{(1)} = 2(a_0 - b_0)P_n'$$

que é equivalentemente a (7.1). ■

Esta representação para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas foi obtida independentemente por Grosjean [**65**], Ronveaux [**131**] e Marcellán e Ronveaux [**97**].

Vejamos agora que podem existir outras soluções para além das clássicas. De facto, se tomarmos $n = 1, 2, 3$ em (7.1) obtemos, pelo facto de $\{P_n\}$ e $\{P_n^{(1)}\}$ verificarem a mesma relação de recorrência a três termos com condições iniciais $P_0 = 1$, $P_1 = x - \beta_0$ e $P_0^{(1)} = 1$, $P_1^{(1)} = x - \beta_1$, respectivamente

$$\phi'' - \psi' = 2(a_0 - b_0)$$

$$2\phi' - \psi + (\lambda_2 + \phi'' - \psi')(x - \beta_1) = 2(a_0 - b_0)(2x - \beta_0 - \beta_1)$$

$$2\phi + (2\phi' - \psi)(P_2^{(1)})' + (\lambda_3 + \phi'' - \psi')P_2^{(1)} = 2(a_0 - b_0)P_3'$$

onde $P_2^{(1)} = x^2 - (\beta_1 + \beta_2)x + \gamma_2$ e $P_3' = 3x^2 - 2(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)x + (\beta_0\beta_1 + \beta_0\beta_2 + \beta_1\beta_2 - \gamma_2 - \gamma_1)$. Assim, β_1 vem definido em termos de β_0, e γ_2 em termos de

γ_1. Temos assim dois graus de liberdade, que é algo que não acontece para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas saídas da equação (1.1).

Generalizemos o método descrito na Secção 2 para estudar as soluções polinomiais de (7.1).

TEOREMA 7.2. *Se $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos que satisfaz* (7.1) *os coeficientes da relação de recorrência a três termos que lhe está associada* (1.2) *vêm dados por*

$$\beta_{n+1} = \frac{-2a_1(n+1)(na_0+b_0) + (b_1 - 2(a_0-b_0)\beta_0)b_0}{(2(n+1)a_0+b_0)(2na_0+b_0)} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{n+2} = &-\frac{((n+1)a_0+b_0)(n+1)a_2 + (a_0^2-b_0^2)\gamma_1}{((2n+3)a_0+b_0)((2n+1)a_0+b_0)} \\ &+ v_n \frac{(n+1)(-(n+2)a_1+b_1-2(a_0-b_0)\beta_0)}{((2n+3)a_0+b_0)((2n+2)a_0+b_0)^2((2n+1)a_0+b_0)}\end{aligned} \tag{7.3}$$

onde

$$\begin{aligned}v_n = &-((2n+1)a_0+b_0)a_1b_0 \\ &+ (((n+1)a_0+b_0)(2(a_0-b_0)\beta_0+b_1) - n(n+1)a_0a_1)a_0\end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos (ver [**35**])

$$P_{n-1}^{(1)}(x) = x^{n-1} - A_nx^{n-2} + B_nx^{n-3} + \dots$$

$$P_n(x) = x^n - (A_n+\beta_0)x^{n-1} + (B_n+\beta_0A_n-\gamma_1)x^{n-2} + \dots$$

onde $A_n = \sum_{k=1}^{n-1}\beta_k$ e $B_n = \sum_{1\le i<j\le n-1}\beta_i\beta_j - \sum_{k=2}^{n-1}\gamma_k$. Agora, comparando os coeficientes de x^{n-2}, x^{n-3} em (7.1) obtemos que A_n e B_n vêm dados por

$$A_{n+2} = \frac{(n+1)(-(n+2)a_1+b_1-2(a_0-b_0)\beta_0)}{2(n+1)a_0+b_0} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}B_{n+3} = &-\frac{(n+1)(-2(a_0-b_0)\gamma_1 - (n+2)a_2}{2((2n+3)a_0+b_0)} \\ &- \frac{(n+1)((n+2)a_1-b_1+2(a_0-b_0)\beta_0)A_{n+3})}{2((2n+3)a_0+b_0)}\end{aligned} \tag{7.5}$$

para $n \in \mathbb{N}$. Derivando (1.2) obtemos

$$P_n = P'_{n+1} - (x-\beta_n)P'_n + \gamma_nP'_{n-1}$$

	β_n	γ_{n+1}
$\mathcal{H}_n$	$2\beta_0$	$\frac{n}{2}+\gamma_1$
$\mathcal{L}_n^\alpha$	$2n-\alpha-1+2\beta_0$	$n(n-\alpha+2\beta_0)+\gamma_1$
$\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$	$\frac{(\beta+\alpha+2)(\alpha-\beta+2(1+\alpha+\beta)\beta_0)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{-1}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)} [(1-(\alpha+\beta+2)^2)\gamma_1 + n(2+\alpha+\beta+n) (\frac{(\alpha-\beta+2(1+\alpha+\beta)\beta_0)^2-1}{(2n+\alpha+\beta+2)^2}-1)]$
$\mathcal{B}_n^\alpha$	$\frac{2(2+\alpha)(1+(1+\alpha)\beta_0)}{(2n+\alpha)(2n+\alpha+2)}$	$\frac{4n(n+\alpha+2)(1+(\alpha+1)\beta_0)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)} + \frac{(3+5\alpha)\gamma_1}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+3)}$

TABELA 2. Clássicos Generalizados

Multiplicando esta equação por $2(a_0-b_0)$ e aplicando (7.1)

$$\begin{aligned}
2(a_0-b_0)P_n &= L^*_{n+1}P_n^{(1)} - (x-\beta_n)L^*_nP^{(1)}_{n-1} + \gamma_n L^*_{n-1}P^{(1)}_{n-2} \\
&= L^*_n\left(P_n^{(1)} - (x-\beta_n)P^{(1)}_{n-1} + \gamma_n P^{(1)}_{n-2}\right) + 2\phi\left(P^{(1)}_{n-1}\right)' \\
&\quad +(2\phi'-\psi)P^{(1)}_{n-1} \\
&\qquad - (2na_0+b_0)P_n^{(1)} + (2(n-1)a_0+b_0)\gamma_n P^{(1)}_{n-2}
\end{aligned}$$

Agora, tomando em consideração (1.2)

$$\begin{aligned}
2(a_0-b_0)P_n = 2\phi\left(P^{(1)}_{n-1}\right)' + (2\phi'-\psi)P^{(1)}_{n-1} \\
- (2na_0+b_0)P_n^{(1)} + (2(n-1)a_0+b_0)\gamma_n P^{(1)}_{n-2}
\end{aligned} \tag{7.6}$$

Comparando os coeficientes de x^{n-1}, x^{n-2} da equação (7.6) obtemos

$$\beta_{n+1} = -\frac{-2a_0A_{n+1} + 2(n+1)a_1 - b_1 + 2(a_0-b_0)\beta_0}{2(n+1)a_0+b_0} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{n+2} = {} & \frac{4a_0B_{n+2} - 2(a_0-b_0)\gamma_1 - 2(n+1)a_2}{2((2n+3)a_0+b_0)} \\
& + \frac{2(a_0-b_0)\beta_0 + 2(n+1)a_1 - b_1 + (2(n+2)a_0+b_0)\beta_{n+2}}{2((2n+3)a_0+b_0)}A_{n+2}
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Temos somente que substituir nas equações (7.7) e (7.8) A_n e B_n dados por (7.4) e (7.5) para obter o resultado desejado. ∎

8. Estudo Completo da Equação Diferencial

Começamos por considerar as expressões canónicas de ϕ, ψ e os correspondentes valores de β_0, γ_1 no caso clássico (ver Tabelas 1 e 3).

Se colocamos estes valores em (7.2) e (7.3) obtemos o resultado apresentado na Tabela 3. Estes coincidem com coeficientes da relação de recorrência a três termos das sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas. Daqui se conclui que o Teorema 7.2 é consistente com os resultados conhecidos para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas.

Se considerarmos as expressões canónicas de ϕ, ψ em (7.2) e (7.3) obtemos os dados apresentados na Tabela 2. Falta-nos somente determinar as medidas a respeito das quais estas sucessões de polinómios mónicos são ortogonais, para completar o estudo do nosso problema.

8.1. Estudo do caso $\mathcal{H}_n$. Por uma análise superficial vemos que estes polinómios são praticamente os de Hermite. Mas se $\beta_0 \neq 0$, não podemos obter estes polinómios por uma transformação afim na variável de qualquer polinómio de Hermite, pois por uma tal transformação $\begin{cases} \beta_n = -\frac{b}{a} \\ \gamma_{n+1} = \frac{n+1}{2a^2} \end{cases}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\beta_0 \neq \beta_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Mas se $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ e $a = \pm 1$, então $b = \mp 2\beta_0$ e $\mathcal{H}_n(x) = H_n\left(\frac{x \mp 2\beta_0}{\pm 1}; \beta_0\right)$, onde $H_n(x; d)$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos co-recursiva de Hermite. Destes casos obtemos a expressão geral para estes polinómios

$$\mathcal{H}_n(x) = H_n^{(c)}\left(\pm\sqrt{2\gamma_1}(x \mp 2\beta_0); \beta_0\right).$$

Note-se que o caso $\beta_0 = 0$ está incluído nesta caracterização, pois neste caso o parâmetro de co-recursividade β_0 é zero, i.e. temos os polinómios associados de Hermite. Para determinar a medida que lhes está associada temos que considerar dois casos distintos:

(a) Se γ_1 é um inteiro não negativo não obtemos sucessões de polinómios ortogonais mónicos no sentido da ortogonalidade relativamente a uma funcional linear quase-definida.

(b) Se γ_1 não é um inteiro negativo obtemos as sucessões de polinómios ortogonais mónicos estudadas por Bustoz e Ismail em [**30**] ou por

Askey e Wimp em [**11**]. Askey e Wimp deram também a expressão para os pesos, $w^{(2\gamma_1-1)}$ da sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{H_n^{(2\gamma_1-1)}\}$, i.e.

$$w^{(c)}(x) = \frac{(\Gamma(c+1))^2 2^{-c}\exp(-x^2)}{\int_0^\infty |c\exp(-t^2-2ixt)t^{c-1}|^2 dt}$$

onde $c = 2\gamma_1 - 1$ e Γ é a função Gamma.

Do Teorema I.4.2 obtemos a medida correspondente. ■

8.2. Estudo do caso $\mathcal{L}_n^\alpha$. Comparando os coeficientes da Tabela 3 com $n+c$ e a em vez de n e α, respectivamente, com os da Tabela 2 obtemos

$$\begin{cases} 2n+a+1+2c = 2n-\alpha-1+2\beta_0 \\ (n+c+1)(n+a+c+1) = n(n-\alpha+2\beta_0)+\gamma_1 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a+2c+2 = -\alpha+2\beta_0 > 0 \\ (c+1)(a+c+1) = \gamma_1 > 0 \end{cases} \tag{8.1}$$

e daqui concluímos

$$\begin{cases} a = \sqrt{(-\alpha+2\beta_0)^2-4\gamma_1} \\ c = -1+\frac{-\alpha+2\beta_0-\sqrt{(-\alpha+2\beta_0)^2-4\gamma_1}}{2} \end{cases} \quad \text{se } c > -1.$$

Note que de (8.1) $\beta_0 = \frac{a+2(c+1)+\alpha}{2}$ e $\beta_0^c = 2c+a+1$, portanto

$$2\beta_0 = \beta_0^c + (\alpha+1).$$

Assim, somente quando $\beta_0 = \alpha+1$ temos $\mathcal{L}_n^\alpha(x) = (L_n^a)^{(c)}(x)$, caso contrário $\mathcal{L}_n^\alpha(x) = L_n^a(x; -2\beta_0+\alpha+1)$. Mas de [**11**] que a medida correspondente a $\left\{(L_n^a)^{(c)}\right\}$ é

$$w^{(c)}(x) = \frac{x^\alpha\exp(-x)}{|\Psi(c, 1-\alpha; x\exp(x^{-\pi i}))|^2}$$

onde Ψ é a função de Tricomi. Estamos em condições de aplicar o Teorema I.4.2 obtendo assim a correspondente medida para estas sucessões de polinómios ortogonais mónicos. ■

8.3. Estudo do caso $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$. Comparando, como no exemplo anterior, os coeficientes β_n das Tabelas 3 e 2 no caso Jacobi, i.e.

$$(b^2-a^2)(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)$$
$$= (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0)(2n+a+b+2c)(2n+a+b+2c+2)$$

vem

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+2)(b^2-a^2) \\ = (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0)(a+b+2c)(a+b+2c+2) \quad [n^0]$$

$$(2\alpha+2\beta+2)(b^2-a^2) \\ = (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0)(2a+2b+4c+2) \quad [n^1]$$

$$b^2-a^2 = (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0) \quad [n^2]$$

Então

$$b^2-a^2 = (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0) \text{ e } \begin{cases} a = \pm b \\ \text{ou} \\ a+b+2c = \alpha+\beta \end{cases}$$

Temos agora dois casos a considerar:

(a). $a+b+2c = \alpha+\beta$ e $b^2-a^2 = (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0)$

Comparando os correspondentes γ_n obtemos

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} \text{ e } \begin{cases} a = b = 1/2\,, \quad c = \frac{\alpha+\beta-1}{2} \\ \text{ou} \\ a = b = -1/2\,, \quad c = \frac{\alpha+\beta+1}{2} \end{cases}$$

Agora, $a = b$, portanto

(a1). $\alpha+\beta+2 = 0 \Longrightarrow c < 0$ (que é impossível).

(a2). $2(\alpha+\beta+1)\beta_0 = \beta-\alpha$. Aqui, se $\alpha+\beta+1 = 0$ então $\gamma_1 = \frac{1}{4}$, $a = b = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $c = 0$ e β_0 é arbitrário. Caso contrário temos $\beta_0 = \frac{\beta-\alpha}{2(\alpha+\beta+1)}$, $\gamma_1 = \frac{1}{4}$, $a = b = \pm\frac{1}{2}$ ou $a = -b = \pm\frac{1}{2}$.

(b). $a = \pm b$ e $b^2-a^2 = (\alpha+\beta+2)(\alpha-\beta+2(\alpha+\beta+1)\beta_0)$

(b1). $\alpha+\beta+2 = 0$ e $a = b$

Se compararmos os γ_n

$$\frac{(n+1+c)(n+2a+1+c)}{(2n+2a+1+2c)(2n+2a+3+2c)} = -\frac{\gamma_1+(\alpha+1-\beta_0)^2-n^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Comparando os coeficientes segundo as potências de n

$$4 = 4 \quad [n^4]$$

$$4(2+2c+2a) = 2(4a+4c+4) \quad [n^3]$$

$$4(1+c)(2a+1+c)-1 \\ = (2a+1+2c)(2a+3+2c)-4(\gamma_1+(\alpha+1-\beta_0)^2) \quad [n^2]$$

$$-2(a+1+c) = -8(a+c+1)(\gamma_1 + (\alpha+1-\beta_0)^2) \qquad [n^1]$$

$$-(1+c)(2a+1+c) = -(2a+2c+1)(2a+2c+3)(\gamma_1 + (\alpha+1-\beta_0)^2) \qquad [n^0]$$

e portanto

$$a = b = \pm\frac{1}{2} \text{ e } \gamma_1 = \frac{1}{4} - (\alpha+1-\beta_0)^2$$

(b2). $\alpha+\beta+2=0$ e $a=-b$

Se compararmos os γ_n obtemos

$$\frac{(n+a+1+c)(n-a+1+c)}{(2n+1+2c)(2n+3+2c)} = -\frac{\gamma_1 + 4(\alpha+1-\beta_0)^2 - 4n^2}{4(2n-1)(2n+1)}$$

Comparando os coeficientes segundo as potências de n

$$16 = 16 \qquad [n^4]$$

$$32(1+c) = -8(2c+3) - 8(2c+1) \qquad [n^3]$$

$$16((1+c)^2 - a^2) - 4 = -16\gamma_1 + 4(2c+1)(2c+3) - 16(\alpha+1-\beta_0)^2 \qquad [n^2]$$

$$-8(1+c) = -2(2c+3+2c+1)(4\gamma_1 + 4(\alpha+1-\beta_0)^2) \qquad [n^1]$$

$$-4((1+c)^2 - a^2) = -(2c+1)(2c+3)(4\gamma_1 + 4(\alpha+1-\beta_0)^2) \qquad [n^0]$$

e portanto

$$a = -b = \pm\frac{1}{2} \text{ e } \gamma_1 = \frac{1}{4} - (\alpha+1-\beta_0)^2$$

(b3). $2(\alpha+\beta+1)\beta_0 = \beta-\alpha$ e $a=b$

Se comparamos os γ_n obtemos

$$\frac{(n+1+c)(n+2a+1+c)}{(2n+2a+1+2c)(2n+2a+3+2c)} = -\frac{(1-(\alpha+\beta+2)^2)\gamma_1 - n(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)}$$

Comparando os coeficientes segundo as potências de n

$$4 = 4 \qquad [n^4]$$

$$4(2+2c+2a) + 2(2\alpha+2\beta+4) = 4(2+\alpha+\beta) + 2(4a+4c+4) \qquad [n^3]$$

$$(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)(4\gamma_1-1) + 4(a+c+1)(\alpha+\beta+2) = 4(1+c)(2a+c+1) - (2a+2c+1)(2a+2c+3) \qquad [n^2]$$

$$2(a+c+1)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)(4\gamma_1-1)$$
$$= (\alpha+\beta+2)(4(1+c)(2a+c+1)-(2a+2c+1)(2a+2c+3)) \quad [n^1]$$

$$(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)$$
$$[(2a+2c+1)(2a+2c+3)\gamma_1-(1+c)(2a+c+1)]=0 \quad [n^0]$$

e de $[n^0]$, três casos se podem dar

(b31). $\alpha+\beta+1=0$.

Então $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ e $a=b=\pm\frac{1}{2}$.

(b32). $\alpha+\beta+3=0$

Então $\beta_0=\frac{2\alpha+3}{4}$ e $a=b=\pm\frac{1}{2}$.

(b33). $(2a+2c+1)(2a+2c+3)\gamma_1=(1+c)(2a+c+1)$.

Então, de $[n^1]$ obtemos $\gamma_1=\frac{1}{4}$ ou $2(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)(a+c+1)=(\alpha+\beta+2)(2a+2c+1)(2a+2c+3)$.

Agora, se $\gamma_1=\frac{1}{4}$, de $[n^2]$

$$\beta_0=\frac{\beta-\alpha}{2(1+\alpha+\beta)} \quad \text{e} \quad a=b=\pm\frac{1}{2}$$

se não, de $[n^2]$ obtemos

$$c=\frac{\alpha+\beta}{2}-a \quad \text{e} \quad \beta_0=\frac{\beta-\alpha}{2(1+\alpha+\beta)}$$

(b4). $2(\alpha+\beta+1)\beta_0=\beta-\alpha$ e $a=-b$

Se comparamos os γ_n

$$\frac{(n+a+1+c)(n-a+1+c)}{(2n+1+2c)(2n+3+2c)}$$
$$=-\frac{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)\gamma_1+n(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+3)}$$

Comparando os coeficientes segundo as potências de n

$$4=4 \quad [n^4]$$

$$8(c+1)+2(2\alpha+2\beta+4)=4(2+\alpha+\beta)+2(4c+4) \quad [n^3]$$

$$(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)(4\gamma_1-1)$$
$$=4(1+c-a)(a+c+1)-(2c+1)(2c+3) \quad [n^2]$$

$$2(c+1)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)(4\gamma_1-1)$$
$$=(\alpha+\beta+2)(4(1+c+a)(c+1-a)-(2c+1)(2c+3)) \quad [n^1]$$

$\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$	$\left(P_n^{a,b}\right)^{(c)}$
$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$	$a=b=\pm\frac{1}{2}$ or $a=-b=\pm\frac{1}{2}$
$\alpha+\beta+3=0$, $\beta_0=\frac{2\alpha+3}{4}$	$a=b=\pm\frac{1}{2}$ or $a=-b=\pm\frac{1}{2}$
$\alpha+\beta+2=0$, $\gamma_1=\frac{1}{4}-(\alpha-\beta_0+1)^2$	$a=b=\pm\frac{1}{2}$ or $a=-b=\pm\frac{1}{2}$
$\beta_0=\frac{\beta-\alpha}{2(\alpha+\beta+1)}$, $\gamma_1=\frac{1}{4}$	$a=b=\pm\frac{1}{2}$ or $a=-b=\pm\frac{1}{2}$
$\beta_0=\frac{\beta-\alpha}{2(\alpha+\beta+1)}$	$a=b=\frac{\pm\sqrt{(\alpha+\beta+2)^2-4(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)\gamma_1}}{2}$ e $\left[c=\frac{\alpha+\beta}{2}-a \text{ or } c=\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$

TABELA 3. Caso Jacobi Generalizado

$$(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+3)[4(1+c+a)(c+1-a)-(2c+1)(2c+3)\gamma_1]=0 \qquad [n^0]$$

e portanto, três casos se podem dar

(b41). $\alpha+\beta+1=0$

Então $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ e de $[n^1]$ $a=-b=\pm\frac{1}{2}$.

(b42). $\alpha+\beta+3=0$

Então $\beta_0=\frac{2\alpha+3}{4}$ e de $[n^1]$ $a=-b=\pm\frac{1}{2}$.

(b43). $(2c+1)(2c+3)\gamma_1=4(1+c+a)(c+1-a)$

Logo

$$\gamma_1=\frac{1}{4}, \quad a=-b=\pm\frac{1}{2} \text{ e } \beta_0=\frac{\beta-\alpha}{2(1+\alpha+\beta)}$$

ou

$$c=\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ e } a=-b=\pm\frac{1}{2}$$

Os resultados encontram-se na Tabela 3. Logo $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}$ é ortogonal em $[0,1]$ (ver Wimp [**151**]) relativamente à função peso

$$w^{(\delta)}(x) = \frac{(1-x)^\alpha x^\beta}{|F(\delta,2-\gamma-\delta;1-\beta;x)+K(\delta)(-x)^\beta F(\beta+\delta,\beta+2-\gamma-\delta;1+\beta;x)|^2}$$

onde $K(\delta) = \frac{\Gamma(-\beta)\Gamma(\delta+\beta)\Gamma(\delta+\gamma-1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\delta+\gamma-\beta-1)\Gamma(\delta)}$ e $\delta = \alpha+\beta+1$. Tendo em atenção o Teorema I.4.2 podemos calcular a medida associada a estes polinómios. ■

OBSERVAÇÃO .

- Relembre-se que β_0, γ_1 são parâmetros arbitrários, portanto obtemos somente alguns exemplos de sucessões de polinómios ortogonais mónicos para as quais a medida é conhecida.
- Não estudámos o caso $\mathcal{B}_n^\alpha$ porque não temos, neste caso, informação acerca dos polinómios associados de Bessel.
- $\mathcal{B}_n^\alpha$ é um exemplo de sucessão de polinómios ortogonais mónicos que resulta de B_n^α por meio de uma perturbação. De facto, se denotarmos por β_n', γ_n' os coeficientes da relação de recorrência a três termos de $\mathcal{B}_n^\alpha$, obtemos $\beta_n - \beta_n' = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ e $\gamma_n - \gamma_n' = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Assim, podemos aplicar [**117**, T. 3, p. 177] a parte absolutamente contínua da medida associada a $\mathcal{B}_n^\alpha$. Mas, os resultados vêm dados em termos dos novos polinómios, o que não é um bom resultado para os nossos propósitos.

8.4. Caso singular. Considere-se o caso em que $\phi \equiv 0$, a que chamaremos *caso singular*. De (7.6) estes polinómios satisfazem

$$-2b_0 P_n = -b_0 P_n^{(1)} - \psi P_{n-1}^{(1)} + b_0 \gamma_n P_{n-2}^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

Mas sabemos que $\{P_n^{(1)}\}$ verifica a seguinte relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &xP_n^{(1)}(x) = P_{n+1}^{(1)}(x) + \beta_{n+1} P_n^{(1)}(x) + \gamma_{n+1} P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \\ &P_0^{(1)}(x) = 1, \quad P_1^{(1)}(x) = x - \beta_1. \end{aligned}$$

portanto (8.2) pode ser reescrita como

$$P_n = P_n^{(1)} + \left(\frac{b_1}{2b_0} + \frac{\beta_n}{2}\right) P_{n-1}^{(1)} \tag{8.3}$$

Tendo em atenção a expressão dos coeficientes de $P_n, P_n^{(1)}$, podemos reescrever (8.3) como

$$x^n - x^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k + x^{n-2}\left(\sum_{0\leq i<j\leq n-1}\beta_i\beta_j\right) + \cdots = x^n - x^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\beta_k$$
$$+ x^{n-2}\left(\sum_{1\leq i<j\leq n}\beta_i\beta_j\right) + \ldots$$
$$+ \left(\frac{b_1}{2b_0} + \frac{\beta_n}{2}\right)\left(x^{n-1} - x^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\beta_k + \ldots\right) \quad (8.4)$$

Comparando os coeficientes das potências de $n-1$ e $n-2$ respectivamente em (8.4) obtemos

$$\beta_{n+1} = \frac{b_1}{b_0} + 2\beta_0\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8.5)$$
$$\gamma_{n+2} = \gamma_1\,, \quad n \in \mathbb{N} \quad (8.6)$$

De (8.5),(8.6) obtemos que $\{P_n\}$ é uma transformação afim dos polinómios de Tchebychev de segunda espécie $\{U_n\}$. De facto, tome-se $\beta_0 = 0$ em (8.5),(8.6)

$$\begin{cases} \frac{b_1}{b_0} = \frac{b}{a} \\ \gamma_1 = \frac{1}{4a^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = \frac{2\sqrt{\gamma_1}b_1}{2\gamma_1 b_0} \\ a = \frac{\sqrt{\gamma_1}}{2\gamma_1} \end{cases}$$

Portanto, no caso geral $P_n(x) = U_n\left(\frac{x - \frac{2\sqrt{\gamma_1}b_1}{b_0}}{\frac{\sqrt{\gamma_1}}{2\gamma_1}}; -2\beta_0\right)$. ∎

CAPÍTULO V

Problema de Karlin e Szegő

1.	**Introdução**	**111**
	1.1 Nota Histórica	**111**
	1.2 Caso Semi Clássico	**112**
	1.3 Resultados Principais	**114**
	1.4 Estrutura do Capítulo	**116**
2.	**Polinómios Ortogonais Semi Clássicos**	**116**
3.	**Equações Diferenciais em Diferenças**	**119**
4.	**Extensão do Teorema de Bochner**	**123**
	3.1 Caso Hermite e Bessel	**123**
	3.2 Caso Laguerre	**126**
5.	**Sobre uma Nova Caracterização**	**129**

1. Introdução

1.1. Nota Histórica. Aqui vamos tratar de polinómios ortogonais semi clássicos e as suas relações com as equações diferenciais de diferenças. Estamos de acordo com Maroni [**103**] quando diz que a teoria dos polinómios ortogonais semi clássicos foi iniciada por Shohat em [**137**], quando considerou sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$ ortogonais relativamente a funções peso w tais que

$$(Aw)' = Bw \tag{1.1}$$

com $A, B \in \mathbb{P}$, tais que $\operatorname{gr} B \geq 1$. Neste trabalho Shohat não estudou as funcionais que verificam (1.1), i.e. quando é que podemos associar-lhes uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos, estando este problema todavia por estudar. Ele deu-nos condições suficientes por forma a termos a regularidade. Para tal basta considerar $w \in \mathrm{L}^1([a,b])$ e tal que $\lim_{x\to a,b} Aw = 0$. Nesta condições e tendo em atenção a ortogonalidade de $\{P_n\}$ relativamente a w, aplicando o Teorema de Favard (cf. Teorema I.2.1) ou equivalentemente a relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &xP_n = P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1} \text{ para } n = 1, 2, \dots \\ &P_0 = 1\,, \quad P_1 = x - \beta_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

obteve que $\{P_n\}$ verifica as seguintes relações diferenciais de diferenças

$$AP_n' + BP_n = \sum_{k=n-s}^{n+s} a_{n,k} P_k\,, \quad n \geq s \tag{1.3}$$

$$AP_n'' + BP_n' = \sum_{k=n-s-1}^{n+s-1} b_{n,k} P_k\,, \quad n \geq s\,. \tag{1.4}$$

Agora, a partir das equações (1.2), (1.3) e (1.4) obteve que $\{P_n\}$ verifica uma equação diferencial de segunda ordem. De facto, podemos escrever (1.3) e (1.4) na seguinte forma

$$a_n P_n + b_n P_{n-1} = AP_n' + BP_n\,, \quad n \geq s$$

$$c_n P_n + d_n P_{n-1} = AP_n'' + BP_n'\,, \quad n \geq s$$

com a_n, b_n, c_n, d_n polinómios com graus independentes de n. Assim, temos

$$P_n = \frac{\begin{vmatrix} AP_n' + BP_n & b_n \\ AP_n'' + BP_n' & d_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix}}$$

e portanto

$$b_n A P_n'' + (b_n B - d_n A) P_n' + (\begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} - d_n B) P_n = 0. \tag{1.5}$$

Neste trabalho, Shohat mostrou como estudar o comportamento assimptótico dos parâmetros γ_n de (1.2) quando $w(x) = \exp(-x^4)$. Podemos então dizer que ele foi um dos pioneiros no estudo dos polinómios ortogonais tipo Freud. Mais tarde, como consequência de um estudo interessante sobre determinantes de polinómios ortogonais, Karlin e Szegő [**76**] propuseram o problema de determinar as medidas que estão associadas a sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ que verificam (1.3).

A resposta a este problema foi dada independentemente por Maroni [**100**] e Bonan, Lubinsky e Nevai em sucessivos trabalhos [**17, 18, 113, 114**].

Com o objectivo de resolver este problema o primeiro desenvolveu a teoria da quase-ortogonalidade das derivadas de polinómios, que lhe permitiu dar resposta a outras questões da teoria dos polinómios ortogonais e apresentar novos problemas (cf. [**103**]). Maroni denominou as sucessões de polinómios ortogonais mónicos que verificam (1.3) de *semi clássicas* pois a funcional linear $\boldsymbol{u}$ relativamente à qual $\{P_n\}$ é ortogonal verifica uma equação do tipo Pearson (1.1).

Por outro lado Bonan, Lubinsky e Nevai estavam mais interessados em obter uma representação explicita para as medidas associadas a $\{P_n\}$.

Paralelamente ao estudo realisado por estes autores temos o trabalho de Hahn [**69**] onde provou que as sucessão de polinómios ortogonais mónicos verificando (1.5) têm por medida associada uma solução de (1.1) para alguns polinómio A e B. Em [**19**] Branquinho apresentou um algoritmo para o cálculo destes polinómios A, B da equação de Pearson.

1.2. Caso Semi Clássico. No estudo realizado por Maroni, podemos ver uma tentativa de estender os resultados válidos para sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas a semi clássicas. De facto, é sabido que as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas têm associada uma funcional linear verificando (1.1) com $\operatorname{gr} A \leq 2$ e $\operatorname{gr} B = 1$ (cf. [**26**]). A expressão canónica para A e B a que chamaremos ϕ e ψ, respectivamente, vêm dadas na Tabela 1.

Outro facto importante, resulta de $\{P_n\}$ verificar uma equação tipo Bochner, i.e.

$$\phi P_n'' + \psi P_n' + \lambda_n P_n = 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.6}$$

Como a sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$ definida por (1.6) verifica uma relação de recorrência a três termos independentemente de ser ou não ortogonal (cf. Teorema IV.2.1), onde β_n, γ_n são parâmetros dados em termos dos coeficientes dos polinómios ϕ, ψ, temos um critério para a regularidade das funcionais lineares que são solução de (1.1).

Neste trabalho necessitamos conhecer os coeficientes da relação de recorrência a três termos para os elementos das famílias clássicas. Esta informação encontra-se contida na Tabela 3.

Relembre-se que a regularidade das funcionais lineares que são soluções do sistema (1.1), com A, B polinómios arbitrários, não foi ainda estudado. As sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas admitem outras caracterizações (ver Capítulo IV) algumas das quais podem ser estendidas às semi clássicas. Estas generalizações podem ver-se em [**14, 70, 101, 103, 130**]. Recentemente, mostrámos em [**20**] que nem sempre podemos estender essas caracterizações válidas para as famílias clássicas. De facto, a caracterização apresentada no Teorema IV.5.2 não pode ser estendida às sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas.

Vamos agora analisar o trabalho de Bonan, Lubinsky e Nevai [**17**]. Os autores começaram com duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ que verificavam

$$TR_n^{(k)} = \sum_{k=n-j-t_1}^{n-j+s_1} c_{n,k} P_k\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

onde $T = \frac{A_1}{A_2}$ com $A_1, A_2 \in \mathbb{P}$ e $c_{n,k} = 0$ para $k < 0$, e determinaram a expressão para as medidas que lhes estavam associadas. Em [**25**] usando uma técnica que aqui apresentaremos, estendemos este resultado a sucessões de polinómios mónicos, ortogonais relativamente a funcionais lineares. Mostrámos também que $\{R_n\}$ e $\{P_n\}$ são sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas. As ideias aí contidas permitiram Alfaro et al. [**7**] determinar a equação de Pearson para a funcional linear associada à sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ que verificam (1.4).

1.3. Resultados Principais. Como vimos, a partir da equação de Bochner satisfeita por uma sucessão de polinómios mónicos $\{P_n\}$, podemos obter condições necessárias e suficientes para a sua ortogonalidade. Aqui estamos mais interessados em resolver o seguinte problema proposto por Branquinho, Foulquié Moreno e Marcellán em [**27**] que generaliza, como veremos, o problema de Bochner tratado no Capítulo anterior.

PROBLEMA V.1. *Seja $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos correspondente à funcional linear $\boldsymbol{u}$. Dar condições necessárias e suficientes para que a sucessão de polinómios $\{R_n\}$ definida por*

$$M(x)R_{n-m}(x) = A(x)P_n''(x) + B(x)P_n'(x) + C(x)P_n(x)\,, \quad n \geq m \tag{1.7}$$

seja ortogonal e determinar a funcional linear que lhe está associada.

A este tipo de problemas chamamos *problemas inversos diferenciais.* Vamos somente considerar o caso $m = 0$. Neste caso temos de (1.7) com $n = 0, 1, 2$

$$C = Mc_0\,, \quad B = M(R_1 - P_1)\,, \quad A = M\frac{R_2 - (R_1 - P_1)P_2' - P_2}{2}.$$

Portanto (1.7) toma a forma

$$R_n(x) = \chi(x)P_n''(x) + \Pi(x)P_n'(x) + c_1P_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

onde

$$\chi(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2\,, \quad \Pi(x) = b_0x + b_1\,, \quad c_1 = \frac{1}{c_0}.$$

Note que R_n não é mónico. De facto,

$$R_n = (c_1 + nb_0 + n(n-1)a_0)x^n + \dots$$

portanto supomos $c_1 + nb_0 + n(n-1)a_0 \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$ para obtermos uma família livre de polinómios.

Uma aproximação a este problema foi apresentada por Branquinho e Marcellán em [**23**] quando determinaram relações entre as funcionais lineares $\boldsymbol{u}$ e

$\boldsymbol{v}$ associadas a $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$, respectivamente que verificam

$$\Phi(x)P_n''(x) + \Psi(x)P_n'(x) + \eta(x)P_n(x) = \sum_{k=n-s}^{n+t} a_{n,k}R_{n,k}\,. \tag{1.9}$$

Note que (1.7) é um caso particular desta representação.

TEOREMA 1.1. *Seja $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas às funcionais lineares $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, respectivamente. Se $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ verificarem (1.9), então temos*

$$D^2(\Phi\boldsymbol{u}) - D(\Psi\boldsymbol{u}) + \eta\boldsymbol{u} = \sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\frac{R_k\boldsymbol{v}}{\langle\boldsymbol{v}, R_k^2\rangle} \tag{1.10}$$

e

$$2\phi(x)\boldsymbol{u} = \langle\boldsymbol{u}_y, \phi(y)L^{(0,2)}(x,y) + \psi(y)L^{(0,1)}(x,y) + \eta(y)L^{(0,0)}(x,y)\rangle\boldsymbol{v}$$

onde $L^{(0,j)}$ é o polinómio

$$L^{(0,j)}(x,y)$$
$$= K_{s+2}^{(0,j)}(x,y) - 2P_2'(x)K_{s+1}^{(0,j)}(x,y) + (P_1(x)P_2'(x) - 2P_2(x))K_s^{(0,j)}(x,y)$$

e $K_n^{(r,s)}(x,y) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}\frac{R_j^{(r)}(x)R_j^{(s)}(y)}{\langle\boldsymbol{v}, R_j^2\rangle}$. *Além disso, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são funcionais lineares semi clássicas.*

No nosso caso temos a partir de (1.8) e (1.10) que

$$D^2(\chi\boldsymbol{u}) - D(\Pi\boldsymbol{u}) + c_1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$$

e portanto, os momentos estão relacionados por

$$(c_1 + nb_0 + n(n-1)a_0)u_n + (nb_1 + n(n-1)a_1)u_{n-1} + n(n-1)a_2u_{n-2}$$
$$= v_n$$

que é a relação apresentada por Krall e Sheffer em [**82**] para obter a ortogonalidade de $\{R_n\}$. De (1.8) vemos que, se $\{R_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais então $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ verificam uma equação diferencial de Sturm-Liouville de quarta ordem. Logo do estudo de Krall [**80**] sabemos quais as soluções do nosso problema, i.e. $\{R_n\}$ é um elemento de uma das famílias clássicas, tipo Laguerre (i.e. com função peso $\exp(-x) + \lambda\delta(x)$) tipo Legendre (i.e., ortogonal relativamente à função peso $\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}(\delta(x-1) + \delta(x+1))$), ou tipo Jacobi (i.e. com função peso $(1-x)^{\alpha} + \lambda\delta(x)$).

Vamos analisar os casos em que $\{P_n\}$ em (1.8) coincide com H_n, L_n^α e B_n^α. Este estudo abre-nos um vasto campo de trabalho a que chamaremos *problemas inversos estruturais*, i.e. dada uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ definimos uma sucessão de polinómios mónicos $\{R_n\}$ por

$$R_n = \sum_{j=n-k}^{n} a_{n,j} P_j \,, \quad n \geq k$$

$$R_m = \sum_{j=0}^{m} a_{m,j} P_j \,, \quad 0 \leq m < k \,.$$

Dar condições necessárias e suficientes em termos de $(a_{n,n-j})$ para todo o $j = 0, 1, \ldots, k$ de forma que $\{R_n\}$ seja ortogonal. Este tipo de problemas foram estudados por Branquinho e Marcellán em [**24**].

1.4. Estrutura do Capítulo. O nosso objectivo vai ser o de mostrar as diferentes técnicas por nós utilizadas no desenvolvimento da teoria dos problemas inversos. Começamos por apresentar algumas caracterizações das sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas. Vamos omitir a demonstração destas caracterizações por estas serem já subejamente conhecidas. De qualquer forma apresentamos o resultado que cremos ser fulcral na teoria desenvolvida por Maroni, i.e. o que mostra como passar de (1.3) a (1.1). De seguida estudaremos as extensões por nós efectuadas à teoria dos polinómios ortogonais clássicos.

2. Polinómios Ortogonais Semi Clássicos

A seguinte definição foi apresentada por Ronveaux [**130**] e Maroni [**100**]:

DEFINIÇÃO 2.1. Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear regular $\boldsymbol{u}$; dizemos que $\{P_n\}$ é *semi clássica de classe s* se existe $\phi \in \mathbb{P}_{s+2}$ tal que $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ é quase ortogonal de ordem s associada a $\phi\boldsymbol{u}$.
Se $s = 0$ dizemos que $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos *clássica.*

As expressões canónicas para ϕ e $d\mu$, $\langle \boldsymbol{u}, x^n \rangle = \int_I x^n d\mu(x) \,, \quad n \in \mathbb{N}$, onde I é um caminho, $d\mu$ uma medida complexa, e os coeficientes da relação de recorrência a três termos para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas encontram-se em Tabela 1, 2 e 3.

Vamos apresentar, de seguida, alguns resultados sobre sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas que são extensões de caracterizações para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas. Estes resultados foram enunciados por Maroni em [**100**] e Bonan e al. em [**17**].

TEOREMA 2.1. *Seja* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente à funcional linear* $\boldsymbol{u}$. *Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $\{P_n\}$ *é semi clássica de classe* s*;*

(b) $\exists \phi, \psi \in \mathbb{P}$ *com* $\operatorname{gr} \phi \leq s+2$, $\operatorname{gr} \psi \leq s+1$ *tal que*

$$\phi P'_{n+1} + \psi P_{n+1} = \sum_{k=n-s}^{n+s+2} b_{n,k} P_k \,, \quad n \geq s$$

e $b_{n,n-s} \neq 0$, $n \geq s$*;*

(c) $\exists \phi, \psi \in \mathbb{P}$ *com* $\operatorname{gr} \phi \leq s+2$, $\operatorname{gr} \psi \leq s+1$ *tal que*

$$D(\phi \boldsymbol{u}) = \psi \boldsymbol{u}$$

i.e. $\boldsymbol{u}$ *é uma funcional linear semi clássica de classe* s*;*

(d) $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ *é quase-ortogonal de ordem* s *relativamente à funcional linear* $\phi \boldsymbol{u}$.

OBSERVAÇÃO . Os polinómios ϕ, ψ devem verificar a condição

$$\prod_{c \in \mathcal{Z}_\phi} (|r_c| + |\langle \psi_c \boldsymbol{u}, 1 \rangle|) \neq 0$$

onde $\mathcal{Z}_\phi$ é o conjunto das raízes de ϕ e

$$\phi(x) = (x-c)\phi_c(x)$$
$$\psi(x) + \phi_c(x) = (x-c)\psi_c(x) + r_c(x)$$

como foi provado em [**14, 103**].

DEMONSTRAÇÃO. Provamos somente que (b) implica (c).

Seja $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ a base dual associada a $\{P_n\}$ e escrevamos

$$D(\phi \boldsymbol{\alpha_n}) - \psi \boldsymbol{\alpha_n} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_{n,k} \boldsymbol{\alpha_k} \tag{2.1}$$

onde por definição de base dual

$$\begin{aligned}\lambda_{n,k} &= \langle D(\phi\boldsymbol{\alpha_n}) - \psi\boldsymbol{\alpha_n}, P_k\rangle = -\langle \boldsymbol{\alpha_n}, \phi P_k' + \psi P_k\rangle \\ &= -\langle \boldsymbol{\alpha_n}, \sum_{j=k-s-1}^{k+s+1} b_{k-1,j}P_j\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad k-1-s > n \text{ or } k+1+s < n \\ -b_{k-1,n} & , \quad n-1-s \leq k \leq n+1+s \end{cases}\end{aligned}$$

Logo (2.1) toma a forma

$$D(\phi\boldsymbol{\alpha_n}) - \psi\boldsymbol{\alpha_n} = -\sum_{k=n-1-s}^{n+1+s} b_{k-1,n}\boldsymbol{\alpha_k}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Tomando $n = 0$ em (2.2) e usando (I.2.3) obtemos

$$D(\phi\boldsymbol{u}) - \psi\boldsymbol{u} = -u_0 \sum_{k=0}^{1+s} b_{k-1,0}\frac{P_k\boldsymbol{u}}{\langle \boldsymbol{u}, P_k^2\rangle}$$

donde se conclui a demonstração. ■

Provámos em [**7**] um resultado que nos dá uma caracterização para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas.

TEOREMA 2.2. *Seja* $\{P_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear* $\boldsymbol{u}$*. Se* $\{P_n\}$ *verifica* (1.4) *então* $\boldsymbol{u}$ *vem definida por*

$$D(A\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(B + B_{s+1})\boldsymbol{u}$$

onde B_{s+1} *está determinado por* $b_{n,k}$ *e* A, B*.*

Em [**25**] os autores generalizam os resultados de Bonan, Lubinsky e Nevai para funcionais lineares. Como resultado central desse trabalho temos:

TEOREMA 2.3. *Seja* $\{P_n\}$ *e* $\{R_n\}$ *duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas às funcionais lineares* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *. Então* $\{P_n\}$ *e* $\{R_n\}$ *verificam*

$$\phi R_{n+1}' = \sum_{k=n-s}^{n+p} \lambda_{n,k}P_k\,, \quad n \geq s \tag{2.3}$$

com $\lambda_{n,n-s} \neq 0$*,* $n \geq s$ *se e somente se,* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são funcionais lineares semi clássicas e estão relacionadas por* $\phi(x)\boldsymbol{u} = h(x)\boldsymbol{v}$ *com*

$$h(x) = \left\langle \boldsymbol{u}_y, \phi(y)\left[P_1(y)K_{s+2}^{(0,1)}(x,y) - P_1(x)K_{s+1}^{(0,1)}(x,y)\right]\right\rangle.$$

OBSERVAÇÃO . Em [**17**] os autores provaram que em (2.3) podemos tomar $R_{n+1}^{(i)}$ com $i \in \mathbb{Z}^+$ em vez de R'_{n+1}. Nesse trabalho os autores pretendiam generalizar a noção de sucessão de polinómios ortogonais mónicos semi clássica.

3. Equações Diferenciais em Diferenças

Vamos apresentar agora a demonstração do Teorema 1.1 apresentado por Branquinho e Marcellán em [**25**].

DEMONSTRAÇÃO. Seja $(\boldsymbol{\alpha_n})$ e $(\boldsymbol{\alpha'_n})$ as bases duais associadas a $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$, respectivamente. Assim,

$$D^2(\Phi\boldsymbol{\alpha_n}) - D(\Psi\boldsymbol{\alpha_n}) + \eta\boldsymbol{\alpha_n} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_{n,k}\boldsymbol{\alpha'_k}\,, \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,k} &= \langle D^2(\Phi\boldsymbol{\alpha_n}) - D(\Psi\boldsymbol{\alpha_n}) + \eta\boldsymbol{\alpha_n}, R_k\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{\alpha_n}, \Phi R''_k + \Psi R'_k + \eta R_k\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{\alpha_n}, \sum_{j=k-s}^{k+t} a_{k,j}P_j\rangle \\
&= \begin{cases} 0 \text{ se } k-s>n \text{ ou } k+t<n \\ a_{k,n} \text{ se } n-t\leq k\leq n+s \end{cases}
\end{aligned}$$

i.e., (3.1) toma a forma

$$D^2(\Phi\boldsymbol{\alpha_n}) - D(\Psi\boldsymbol{\alpha_n}) + \eta\boldsymbol{\alpha_n} = \sum_{k=n-t}^{n+s} a_{k,n}\boldsymbol{\alpha'_k}\,, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Em particular, para $n = 0$, 1 e 2

$$\begin{cases}
D^2(\Phi\boldsymbol{\alpha_0}) - D(\Psi\boldsymbol{\alpha_0}) + \eta\boldsymbol{\alpha_0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{s} a_{k,0}\boldsymbol{\alpha'_k} \\
D^2(\Phi\boldsymbol{\alpha_1}) - D(\Psi\boldsymbol{\alpha_1}) + \eta\boldsymbol{\alpha_1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{s+1} a_{k,1}\boldsymbol{\alpha'_k} \\
D^2(\Phi\boldsymbol{\alpha_2}) - D(\Psi\boldsymbol{\alpha_2}) + \eta\boldsymbol{\alpha_2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{s+2} a_{k,2}\boldsymbol{\alpha'_k}
\end{cases}$$

e tendo em atenção que $\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{P_n\boldsymbol{u}}{\langle\boldsymbol{u},P_n^2\rangle}$, pois $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{u}$, (ver [**100**]), aplicando a regra de Leibniz, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Psi & \eta-\Psi' \\ P_1 & 2\Phi-P_1\Psi & P_1\eta-(P_1\Psi)'+2\Phi' \\ P_2 & 2P_2'\Phi-P_2\Psi & P_2\eta-(P_2\Psi)'+2P_2'\Phi'+2\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^2(\Phi\boldsymbol{u}) \\ D(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

onde $A_i = \langle \boldsymbol{u}, P_i^2\rangle \sum_{k=0}^{s+i} a_{k,i}\boldsymbol{\alpha_k'}$, para $i=0,1,2$. Assim podemos inferir que

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Psi & \eta-\Psi' \\ 0 & 2\Phi & -\Psi+2\Phi' \\ 0 & 0 & 2\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^2(\Phi\boldsymbol{u}) \\ D(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ -P_1A_0+A_1 \\ (P_2'P_1-P_2)A_0-P_2'A_1+A_2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Como $\{R_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{v}$ (i.e., $\boldsymbol{\alpha_n'} = \frac{R_n}{\langle \boldsymbol{v}, R_n^2\rangle}\boldsymbol{v}$, $n\in\mathbb{N}$), e como $a_{n,k} = \frac{\langle \boldsymbol{u}, (\Phi R_n''+\Psi R_n'+\eta R_n)P_k\rangle}{\langle \boldsymbol{u}, P_k^2\rangle}$, deduzimos que

$$2\Phi(x)\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u}_y, \Phi(y)L^{(0,2)}(x,y)+\Psi(y)L^{(0,1)}(x,y)+\eta(y)L^{(0,0)}(x,y)\rangle\boldsymbol{v} \tag{3.3}$$

onde

$$L^{(0,j)}(x,y) = P_2(y)K_{s+2}^{(0,j)}(x,y) - P_2'(x)P_1(y)K_{s+1}^{(0,j)}(x,y) + \\ (P_1(x)P_2'(x)-P_2(x))K_s^{(0,j)}(x,y).$$

De (3.3) e usando a segunda equação de (3.2) obtemos que $\boldsymbol{v}$ é uma funcional linear semi clássica e portanto $\boldsymbol{u}$ é também semi clássica. ∎

Como exemplo de uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos que verificam (1.10) vamos estudar um problema proposto por Littlejohn em [**87**], que passamos a enunciar:

PROBLEMA V.2. *Determinar relações entre as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a* $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + M\delta_0$ *e* $\boldsymbol{w} = x^{-1}\boldsymbol{u} + M\delta_0$, *onde* $\boldsymbol{u}$ *é a funcional linear de Laguerre, definida por*

$$\langle \boldsymbol{u}, x^n\rangle = \int_0^{+\infty} x^n x^\alpha e^{-x}dx\,, \quad n\in\mathbb{N} \;\; \textit{quando} \;\; \alpha > -1.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pode ver-se que $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são funcionais lineares regulares (ver [**19**]). Além disso, estão relacionadas por $x\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{w}$ e

$$\boldsymbol{v} = \underbrace{x\boldsymbol{w}}_{=\boldsymbol{u}} + \underbrace{\langle \boldsymbol{v}, 1\rangle}_{=M}\delta_0.$$

Sejam $\{L_n^{\alpha,0}\}$ e $\{L_n^{\alpha,-1}\}$ as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ respectivamente; vamos dividir o problema em dois outros:

- Determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos para os $\{L_n^{\alpha,0}\}$

$$xL_n^{\alpha,0}(x) = L_{n+1}^{\alpha,0}(x) + \xi_n L_n^{\alpha,0}(x) + \eta_n L_{n-1}^{\alpha,0}(x); \tag{3.4}$$

- Determinar os coeficientes da relação de recorrência a três termos para os $\{L_n^{\alpha,-1}\}$

$$xL_n^{\alpha,-1}(x) = L_{n+1}^{\alpha,-1}(x) + \tilde{\xi}_n L_n^{\alpha,-1}(x) + \tilde{\eta}_n L_{n-1}^{\alpha,-1}(x);$$

em termos de (β_n) e (γ_n) dados por

$$xL_n^{\alpha}(x) = L_{n+1}^{\alpha}(x) + \beta_n L_n^{\alpha}(x) + \gamma_n L_{n-1}^{\alpha}(x). \tag{3.5}$$

De [**19**, p. 58] podemos relacionar (ξ_n) e (η_n) com (β_n) e (γ_n):

$$\left\{\begin{array}{l} \xi_n = 2\beta_{n+1} - \beta_n - M(\dfrac{L_{n+1}^{\alpha}(0)L_n^{\alpha}(0)}{1+MK_n(0,0)} - \dfrac{L_n^{\alpha}(0)L_{n-1}^{\alpha}(0)}{1+MK_{n-1}(0,0)}) \\ \eta_n = 2\gamma_{n+1} - \gamma_n - (\xi_n+\beta_n)(\beta_n - \dfrac{ML_n^{\alpha}(0)L_{n-1}^{\alpha}(0)}{1+MK_{n-1}(0,0)}) + \\ \qquad M(\dfrac{(L_{n+1}^{\alpha}(0))^2}{1+MK_n(0,0)} - \dfrac{(L_n^{\alpha}(0))^2}{1+MK_{n-1}(0,0)}) \end{array}\right. , \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

onde $K_n(0,0) = \frac{(L_{n+1}^{\alpha})'(0)L_n^{\alpha}(0) - (L_n^{\alpha})'(0)L_{n+1}^{\alpha}(0)}{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}$.

De [**19**, T. IV.1.1] podemos relacionar $(\tilde{\xi}_n)$ e $(\tilde{\eta}_n)$ com (β_n) e (γ_n):

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\xi}_{n+1} = \beta_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) \\ \tilde{\eta}_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\gamma_{n+1} \end{array}\right. , \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.7}$$

onde $a_n = \frac{L_{n+1}^{\alpha}(0)\mu_0 + (L_n^{\alpha})^{(1)}(0)}{L_n^{\alpha}(0)\mu_0 + (L_{n-1}^{\alpha})^{(1)}(0)}$, i.e. $a_n = \frac{L_{n+1}^{\alpha}(0;-\frac{1}{\mu_0})}{L_n^{\alpha}(0;-\frac{1}{\mu_0})}$. Agora, necessitamos conhecer $(L_n^{\alpha})(0;-\frac{1}{\mu_0})$ por forma a ter a_n e, portanto, $(\tilde{\xi}_n)$ e $(\tilde{\eta}_n)$. De [**34**]:

$$\frac{(L_n^{\alpha})(0;-\frac{1}{\mu_0})}{L_{n+1}^{\alpha}(0)} - \frac{(L_{n-1}^{\alpha})(0;-\frac{1}{\mu_0})}{L_n^{\alpha}(0)} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\prod_{i=1}^{n}\gamma_i}{L_n^{\alpha}(0)L_{n+1}^{\alpha}(0)}$$

donde

$$(L_n^{\alpha})(0;-\frac{1}{\mu_0}) = L_{n+1}^{\alpha}(0)\left(-\frac{1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{k}\gamma_i}{L_k^{\alpha}(0)L_{k+1}^{\alpha}(0)} + \frac{1}{\beta_0}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Mas, sabemos (ver, por exemplo, [**26, 35**]) que $\beta_i = 2i+1+\alpha$, $\gamma_{i+1} = (i+1)(i+1+\alpha)$ e $L_i^{\alpha}(0) = (-1)^i\frac{(i+\alpha)!}{\alpha!}$, $i \in \mathbb{N}$, logo (3.8) é equivalente a

$$\begin{aligned}(L_n^{\alpha})(0;-\frac{1}{\mu_0}) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{(n+1+\alpha)!}{\alpha!}\left(\frac{1}{\mu_0}\sum_{k=1}^{n}\frac{k!(\alpha!)^2}{(k+1+\alpha)!} + \frac{1}{\alpha+1}\right), \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

De (3.6) e (3.7) obtemos duas relações para os coeficientes de (3.4) e (3.5)

$$\begin{cases} \xi_n = 2(\tilde{\xi}_{n+1} + a_{n+1} - a_n) - (\tilde{\xi}_n + a_n - a_{n-1}) - \\ \qquad M(\frac{L^\alpha_{n+1}(0)L^\alpha_n(0)}{1+MK_n(0,0)} - \frac{L^\alpha_n(0)L^\alpha_{n-1}(0)}{1+MK_{n-1}(0,0)}) \\ \eta_n = 2\frac{a_n}{a_{n+1}}\tilde{\eta}_{n+2} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\tilde{\eta}_{n+1} - (\xi_n+\beta_n)(\beta_n - \frac{ML^\alpha_n(0)L^\alpha_{n-1}(0)}{1+MK_{n-1}(0,0)}) \\ \qquad M(\frac{(L^\alpha_{n+1}(0))^2}{1+MK_n(0,0)} - \frac{(L^\alpha_n(0))^2}{1+MK_{n-1}(0,0)}) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para determinar a relação de estrutura de segunda ordem entre as sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{L^{\alpha,0}_n\}$ e $\{L^{\alpha,-1}_n\}$ basta usar o resultado apresentado em [**19**] e que nos dá

$$x^2(L^{\alpha,0}_n)''(x) + x(2+\psi)(L^{\alpha,0}_n)'(x) + \psi L^{\alpha,0}_n(x) = \\ \lambda_{0,n+1}L^\alpha_{n+1}(x) + a_{n,n}\lambda_{0,n}L^\alpha_n(x) + a_{n,n-1}\lambda_{0,n-1}L^\alpha_{n-1}(x),$$

onde ψ e λ_{n+1} vêm dadas por (IV.1.1). Assim, é suficiente determinar $\{L^\alpha_n\}$ e $\{L^{\alpha,-1}_n\}$ por forma a termos o pretendido. Mas,

$$xL^\alpha_n(x) = L^{\alpha,-1}_{n+1}(x) + (\prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\tilde{\eta}_i})L^{\alpha,-1}_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N},$$

e, portanto,

$$x^3(L^{\alpha,0}_n)''(x) + x^2(2+\psi)(L^{\alpha,0}_n)'(x) + x\psi L^{\alpha,0}_n(x) \\ = \lambda_{0,n+1}L^{\alpha,-1}_{n+2}(x) + \sum_{k=n-1}^{n+1} c_{n,k}L^{\alpha,-1}_k(x)$$

onde as constantes $c_{n,k}$ são dados. Este é o caso em que tomamos $t=2$ e $s=1$ na fórmula (1.10). ∎

4. Extensão ao Teorema de Bochner

Aqui vamos tratar do Problema V.1. Primeiro transformamo-lo num problema inverso estrutural, e depois faremos uma discussão para determinar entre as sucessões de polinómios mónicos quase ortogonais aquelas que são realmente ortogonais.

4.1. Caso Hermite e Bessel. Como H_n é o polinómio de Hermite de grau n temos

$$H'_n = nH_{n-1}$$

e portanto (1.8) toma a forma

$$n(n-1)(a_0x^2+a_1x+a_2)H_{n-2}(x)+n(b_1x+b_2)H_{n-1}(x)+c_1H_n(x) \\ =\mu_n\hat{R}_n(x) \quad (4.1)$$

onde $\{\hat{R}_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos definida em termos de $\{R_n\}$ por $R_n=\mu_n\hat{R}_n$ e $\mu_n=n(n-1)a_0+nb_0+c_1$ diferente de zero para todo o $n\in\mathbb{N}$. Sabemos que a sucessão $\{H_n\}$ verifica a relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &xH_n=H_{n+1}+\frac{n}{2}H_{n-1}\,, \quad n\in\mathbb{Z}^+ \\ &H_1=x\,, \quad H_0=1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Assim (4.1) toma a forma

$$\hat{R}_n(x)=H_n+A_nH_{n-1}+B_nH_{n-2}+C_nH_{n-3}+D_nH_{n-4} \tag{4.3}$$

onde

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{n((n-1)a_1+b_1)}{\mu_n}\,, \quad n\in\mathbb{Z}^+ \\ B_n=\dfrac{n(n-1)}{\mu_n}(\dfrac{2n-3}{2}a_0+a_2+\dfrac{b_0}{2})\,, \quad n\geq 2 \\ C_n=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2\mu_n}a_1\,, \quad n\geq 3 \\ D_n=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\mu_n}a_0\,, \quad n\geq 4 \end{cases}$$

Para determinar a relação de recorrência a três termos para $\{\hat{R}_n\}$, multipliquemos (4.3) por x, e apliquemos (4.2) tendo em atenção (4.3)

$$\begin{aligned} x\hat{R}_n=\hat{R}_{n+1}&+(A_n-A_{n+1})H_n+(\frac{n}{2}+B_n-B_{n+1})H_{n-1} \\ &+(\frac{n-1}{2}A_n+C_n-C_{n+1})H_{n-2}+(\frac{n-2}{2}B_n+D_n-D_{n+1})H_{n-3} \\ &+\frac{n-3}{2}C_nH_{n-4}+\frac{n-4}{2}D_nH_{n-5} \end{aligned}$$

i.e.

$$x\hat{R}_n=\hat{R}_{n+1}-\beta_n\hat{R}_n+\gamma_n\hat{R}_{n-1}+\xi_nH_{n-2}+\eta_nH_{n-3}+\omega_nH_{n-4}+\zeta_nH_{n-5}$$

onde

$$\begin{cases} \beta_n = A_{n+1} - A_n \,, \quad n \geq 0 \\ \gamma_n = \dfrac{n}{2} - (B_{n+1} - B_n) - A_n\beta_n \,, \quad n \geq 1 \\ \xi_n = \dfrac{n-1}{2}A_n - (C_{n+1} - C_n) - B_n\beta_n - A_{n-1}\gamma_n \,, \quad n \geq 2 \\ \eta_n = \dfrac{n-2}{2}B_n - (D_{n+1} - D_n) - C_n\beta_n - B_{n-1}\gamma_n \,, \quad n \geq 3 \\ \omega_n = \dfrac{n-3}{2}C_n - D_n\beta_n - C_{n-1}\gamma_n \,, \quad n \geq 4 \\ \zeta_n = \dfrac{n-4}{2}D_n - D_{n-1}\gamma_n \,, \quad n \geq 5 \end{cases}$$

Logo, $\{\hat{R}_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos se e somente se $\gamma_{n+1} \neq 0$ e $\xi_{n+2} = \eta_{n+3} = \omega_{n+4} = \zeta_{n+5} = 0 \,, \quad n \in \mathbb{N}$.

DISCUSSÃO. O estudo do Problema V.1 vai ser dividido em dois casos.

(i). $a_0 \neq 0$.

Neste caso $D_n \neq 0$ e $\gamma_n = \frac{n\mu_{n-1}}{2\mu_n}$, $n \geq 5$. Como $\omega_n = 0$ temos $\beta_n = A_{n+1} - A_n = 0$, $n \geq 5$. Além disso, de $\eta_n = 0$ temos

$$\frac{\mu_{n+1}}{n+1} - \frac{\mu_n}{n-1} = 0 \,, \quad n \geq 5$$

logo $(n+1)b_0 + 2c_1 = 0$, $n \geq 5$, i.e. $b_0 = c_1 = 0$. Agora, de $\beta_n = 0$ para $n \geq 5$ vem $b_1 = 0$ e portanto $A_n = \frac{a_1}{a_0}$, i.e. $\beta_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Mas, de $\xi_n = 0$, $n \geq 2$ obtemos que $\gamma_n = 0$ para $n \geq 2$; pelo Teorema de Favard concluímos que $\{\hat{R}_n\}$ não pode ser uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos.

(ii). $a_0 = 0$.

A condição $\zeta_n = 0$ é trivialmente verificada. Vejamos que neste caso a_1 terá de ser igual a zero, pois caso contrário:

- $\gamma_n = \frac{n\mu_{n-1}}{2\mu_n}$ para $n \geq 4$ e substituindo esta expressão em $\eta_n = 0$, $n \geq 3$, obtemos $\beta_n = 0$, $n \geq 4$. Agora, de $\xi_n = 0$ para $n \geq 2$ vem que

$$\frac{\mu_{n+1}}{n+1} - \frac{\mu_n}{n-1} = 0 \,, \quad n \geq 4$$

que implica $a_1 = c_1 = 0$, i.e. $\mu_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$ (o que é absurdo).

Assim, $a_0 = 0$ e portanto $a_1 = 0$, i.e., $D_n = C_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Para obter uma expressão para γ_n considerem-se os seguintes casos:

(ii.1). $b_0 \neq -2a_2$ (i.e., $B_n \neq 0$, $n \geq 2$).

Aqui, $\gamma_n = \frac{n\mu_{n-1}}{2\mu_n}$, $n \geq 3$, e como $\xi_n = 0$ obtemos $\beta_n = 0$, $n \geq 3$, então, $(n-2)b_1c_1 = 0$, $n \geq 3$, i.e. $b_1 = 0 \vee c_1 = 0$. Logo, temos dois casos a considerar:

(ii.1.1). $b_1 = 0$ (i.e., $A_n = 0 \Rightarrow \beta_n = 0$).

Comparando as expressões para γ_n, $n \geq 3$ obtemos $(n+1)a_2b_0 = -\frac{(4a_2+b_0)c_1}{2}$, i.e. $a_2 = c_1 = 0$ (pois $b_0 = c_1 = 0$ não se pode ter). Então $\gamma_n = \frac{n-1}{2}$ para $n \geq 1$ (que é absurdo).

(ii.1.2). $c_1 = 0$ (i.e., $A_n = \frac{b_1}{b_0} \Rightarrow \beta_n = 0$).

Sabemos que $\gamma_n = \frac{1}{2}(n - \frac{2c+d}{2d})$, $n \geq 1$. De $\xi_2 = 0$ obtemos $\gamma_2 = \frac{1}{2}$, i.e. $b_0 = 2a_2$; e como $\gamma_1 = \frac{b_0-2a_2}{4b_0} \neq 0$ temos uma contradição.

(ii.2). $b_0 = -2a_2$ (i.e., $B_n = 0$).

Neste momento estamos em condições de escrever que $B_n = C_n = D_n = 0$, e portanto $\eta_n = \omega_n = \zeta_n = 0$. Neste caso $A_n = \frac{nb_1}{nb_0+c_1}$. Temos assim, que discutir dois casos:

(ii.2.1). $b_1 \neq 0$.

De $\xi_n = 0$ vem $\gamma_n = \frac{n\mu_{n-1}}{2\mu_n}$ para $n \geq 2$ que comparada com a primeira expressão para γ_n, nos dá $b_1 = 0$ (o que é impossível).

(ii.2.2). $b_1 = 0$.

Neste caso, temos $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ logo $\{\hat{R}_n\}$ verifica:

$$x\hat{R}_n = \hat{R}_{n+1} + \frac{n}{2}\hat{R}_{n-1}\,, \quad n \geq 1,$$

i.e. $\{\hat{R}_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos de Hermite. ■

O resultado aqui encontrado confirma o que esperávamos obter, pois nenhuma modificação não trivial dos polinómios de Hermite ou até dos de Bessel pertence à classificação apresentada por Krall em [**80**].

4.2. Caso Laguerre. Neste caso

$$R_n = \sum_{j=0}^{4} a_{n,j} L_{n-j}^{\alpha+2} \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{cases} a_{n,n} = n(b_0 + (n-1)a_0) + c_1 \\ a_{n,n-1} = n(2c_1 + b_1 + (3n+\alpha)b_0 + (n-1)(a_1 + a_0(4n+2\alpha))) \\ a_{n,n-2} = n(n-1)(b_1 + (3n+2\alpha)b_0 + a_2 + a_1(2n+\alpha-1) \\ \qquad\qquad\qquad + a_0(6n^2 + 6(\alpha-1)n + \alpha^2 - 5\alpha) + c_1) \\ a_{n,n-3} = n(n-1)(n-2)(n+\alpha)(b_0 + a_1 + a_0(4n+2\alpha-4)) \\ a_{n,n-4} = n(n-1)(n-2)(n-3)(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_0 \end{cases}$$

Se supusermos $a_0 = 0$ obtemos que (4.4) é uma combinação linear de quatro polinómios de Laguerre consecutivos. Podemos perguntar se esta condição é suficiente para que R_n se escreva como combinação linear de quatro polinómios de Laguerre consecutivos?

A resposta é negativa. De facto, Se considerarmos $a_0 \neq 0$ e $a_2 = 0$, tomando em consideração (1.6) e os dados da Tabela 1, obtemos de (1.8)

$$R_n = (a_0 x + a_1)\left[(x - (\alpha+1))\,(L_n^\alpha)' - \lambda_n L_n^\alpha\right] + (b_0 x + b_1)\,(L_n^\alpha)' + c_1 L_n^\alpha$$

e portanto,

$$R_n = \sum_{k=0}^{3} b_{n,n-k} L_{n-k}^{\alpha+1} \tag{4.5}$$

onde

$$\begin{cases} b_{n,n} = c_1 + n((n-1)a_0 + b_0) \\ b_{n,n-1} = n(c_1 + (2n+\alpha)((n-1)a_0 + b_0) + (n-1)((n+\alpha)a_1 + a_1) + b_1) \\ b_{n,n-2} = n(n-1)(n+\alpha)((n-1)a_0 + b_0 + (2n+\alpha-2)a_1 + (n+\alpha)a_1) \\ b_{n,n-3} = n(n-1)(n-2)(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_1 \end{cases}$$

Estudemos a partir de (4.4) e (4.5) o número de polinómios de Laguerre na representação de R_n:

- (a) $a_0 \neq 0$
  - (a1) $a_2 \neq 0 \longrightarrow$ cinco.
  - (a2) $a_2 = 0$
    - (a2.1) $a_1 \neq 0 \longrightarrow$ quatro.
    - (a2.2) $a_1 = 0 \longrightarrow$ três.
- (b) $a_0 = 0$
  - (b1) $a_2 \neq 0$

(b1.1) $a_1 + b_0 \neq 0 \longrightarrow$ quatro.

(b1.2) $a_1 + b_0 = 0 \longrightarrow$ três.

(b2) $a_2 = 0$

(b2.1) $a_1 + b_0 \neq 0 \longrightarrow$ três.

(b2.2) $a_1 + b_0 = 0 \longrightarrow$ dois.

Estudemos detalhadamente o caso (b2.2) com $b_0 = -1$, i.e.

$$R_n(x) = x\,(L_n^\alpha)'' + (-x + b_1)\,(L_n^\alpha)' + c_1 L_n^\alpha.$$

Tomando em consideração (1.6) com os dados da Tabela 3 para L_n^α obtemos

$$\hat{R}_n = L_n^{\alpha+1} + A_n L_{n-1}^{\alpha+1}\,, \quad n \geq 1 \tag{4.6}$$

com $A_n = \frac{n(n+1+\alpha-b_1-c_1)}{n-c_1}$.

Usando o mesmo processo descrito para $\{H_n\}$ vem que

$$x\hat{R}_n = \hat{R}_{n+1} + \xi_n \hat{R}_n + \eta_n \hat{R}_{n-1} + (A_n\gamma_{n-1} - A_{n-1}\eta_n)\hat{R}_{n-2}$$

onde

$$\begin{array}{l} \xi_n = \beta_n + A_n - A_{n+1} \\ \eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + A_{n+1}(\beta_n - \xi_{n+1}) \end{array}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

donde se conclui que as condições necessárias e suficientes para a ortogonalidade de $\{\hat{R}_n\}$ são

$$\eta_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad A_{n+2}\gamma_{n+1} - A_{n+1}\eta_{n+2} = 0 \quad \text{para} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

De (4.8), $\eta_n = \frac{A_n\gamma_{n-1}}{A_{n-1}}$ para $n \geq 2$; e substituirmos esta expressão na segunda equação de (4.7) obtemos

$$\xi_n = \frac{\gamma_n}{A_n} - \frac{\gamma_{n-1}}{A_{n-1}} + \beta_{n-1}\,, \quad n \geq 2$$

e da primeira equação obtemos uma condição necessária para a ortogonalidade,

$$\frac{\gamma_n}{A_n} - \frac{\gamma_{n-1}}{A_{n-1}} + \beta_{n-1} = \beta_n + A_n - A_{n+1}\,, \quad n \geq 2. \tag{4.9}$$

Vê-se então que (4.9) e $\gamma_1 + A_1(\beta_0 - \xi_1) \neq 0$ nos dão uma condição necessária e suficiente para a ortogonalidade de $\{\hat{R}_n\}$ definido por (4.6).

DISCUSSÃO. Da Tabela 3 obtemos os coeficientes da relação de recorrência a três termos para $\{L_n^{\alpha+1}\}$

$$\beta_n = 2n + \alpha + 2 \quad \text{e} \quad \gamma_n = n(n + \alpha + 1)$$

que substituídos em (4.9) e tendo em atenção $\frac{\gamma_n}{A_n} = \frac{(n-c_1)(n+\alpha+1)}{n+1+\alpha-b_1-c_1}$ nos dão

$$\frac{(n-c_1)(n+\alpha+1)}{n+1+\alpha-b_1-c_1} - \frac{(n-1-c_1)(n+\alpha)}{n+\alpha-b_1-c_1} = 2 + \frac{n(n+1+\alpha-b_1-c_1)}{n-c_1} - \frac{(n+1)(n+2+\alpha-b_1-c_1)}{n+1-c_1}. \quad (4.10)$$

Depois de alguns cálculos (4.10) toma a forma

$$-\frac{(b_1+c_1)(n-c_1)+(n+\alpha)}{n+\alpha-b_1-c_1} + \frac{(b_1+c_1)(n-c_1)}{n+1+\alpha-b_1-c_1} = 2 + \frac{n(1+\alpha-b_1)}{n-c_1} + \frac{c_1-(n+1)(2+\alpha-b_1)}{n-c_1+1}$$

e daqui vem que

$$\frac{(b_1+c_1)(1+\alpha-b_1)}{(n+\alpha-b_1-c_1)(n+1+\alpha-b_1-c_1)} = \frac{c_1(1+\alpha-b_1)}{(n-c_1)(n-c_1+1)}. \quad (4.11)$$

Estudando (4.11) e tendo em atenção que $\eta_1 \neq 0$ obtemos que uma condição para a ortogonalidade de $\{\hat{R}_n\}$ é:

(a) $1+\alpha-b_1 = 0$

ou

(b) $b_1 = 0$ e $\alpha = 0$.

O caso (a) leva-nos a $A_n = 0$ logo $\hat{R}_n = L_n^{\alpha+2}$. O caso (b) dá-nos $A_n = \frac{n(n-c_1+1)}{n-c_1}$. Calculemos então η_1 neste caso:

$$\eta_1 = 2 + \frac{2-c_1}{1-c_1}\left(-2 - \frac{2-c_1}{1-c_1} + \frac{2(3-c_1)}{2-c_1}\right) = \frac{c_1(c_1-2)}{(1-c_1)^2}.$$

Temos então que impôr $c_1 \neq 0, 1, 2$ por forma a termos a ortogonalidade no caso (b).

Procedamos agora à determinação da funcional linear associada a $\{\hat{R}_n\}$. Sabemos que a funcional linear associada a $\{L_n^1\}$ admite a seguinte representação

$$\langle \boldsymbol{u^1}, x^n \rangle = \int_0^\infty x^n x \exp(-x) dx\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mas de (4.6) obtemos $\langle \boldsymbol{u^1}, \hat{R}_n \rangle = 0$ para $n \geq 2$. Assim, temos de (I.2.1) e (I.2.3) que $\boldsymbol{u^1}$ pode ser escrita em termos da funcional linear associada a $\{\hat{R}_n\}$ por

$$\boldsymbol{u^1} = \left(t_0 + t_1 \frac{\hat{R}_1}{\langle \boldsymbol{v}, \hat{R}_1^2 \rangle}\right) \frac{\boldsymbol{v}}{v_0} \quad (4.12)$$

onde

$$t_0 = u_0 = 1\,, \quad t_1 = \frac{2-c_1}{1-c_1}.$$

Sabemos também que $\langle \boldsymbol{v}, \hat{R}_1^2 \rangle = \eta_1 v_0$ e $\hat{R}_1 = x - \xi_0$, logo (4.12) toma a forma

$$\boldsymbol{u^1} = x\frac{(1-c_1)\boldsymbol{v}}{c_1 v_0}.$$

Isto implica que $\frac{(1-c_1)\boldsymbol{v}}{c_1 v_0} = x^{-1}\boldsymbol{u^1} + v_0\delta(x)$ e $\frac{(1-c_1)\langle \boldsymbol{v}, 1\rangle}{c_1 v_0} = v_0$, i.e. $v_0 = \frac{1-c_1}{c_1}$. Podemos então concluir que a representação para $\boldsymbol{v}$ vem dada por

$$\langle \boldsymbol{v}, p\rangle = \int \exp(-x)p(x)dx + \frac{1-c_1}{c_1}p(0)\,, \quad p \in \mathbb{P}$$

que mais uma vez está de acordo com a classificação estabelecida por Krall, para as equações diferenciais do tipo Sturm-Liouville de quarta ordem (cf. [**80**]).

■

5. Sobre uma Nova Caracterização

Recentemente, em [**26**] foram estabelecidas novas caracterizações para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas. Nesse trabalho, os autores consideraram como ponto de partida a equação de Pearson no sentido distribucional. É sabido que muitas destas caracterizações podem ser estendidas para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas (veja-se por exemplo [**14, 19, 100**]). Vejamos que nem sempre tal acontece.

Comecemos por explicar a razão pela qual conjecturamos que o Teorema IV.5.2 poderia ser generalizado para o caso semi clássico. A partir de agora suporemos sempre que $s \geq 1$.

TEOREMA 5.1. *Se $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$ e verifica*

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n-(s+1)}^{n} a_{n,k}\frac{P'_k}{k}\,, \quad n \geq s+2 \tag{5.1}$$

com $a_{n,n-(s+1)} \neq 0$ então existe $\phi_{s+2} \in \mathbb{P}$ com $\operatorname{gr}\phi_{s+2} = s+2$ tal que

$$D(\phi_{s+2}\boldsymbol{u}) = P_1\boldsymbol{u} \tag{5.2}$$

i.e. $\boldsymbol{u}$ é semi clássica de classe s.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$ e $\{\boldsymbol{\alpha'_n}\}$ as bases duais associadas a $\{P_n\}$ e $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$, respectivamente. Assim

$$\boldsymbol{\alpha'_n} = \sum_{k\geq n}\lambda_{n,k}\boldsymbol{\alpha_k}$$

onde

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,k} &= \langle \boldsymbol{\alpha'_n}, P_k \rangle = \langle \boldsymbol{\alpha'_n}, \frac{P'_{k+1}}{k+1} + \sum_{j=k-(s+1)}^{n} a_{k,j} \frac{P'_j}{j} \rangle \\
&= \begin{cases} 1 & , \quad k = n \\ a_{k,n+1} & , \quad k = n+1, n+2, \ldots, n+s+2 \\ 0 & , \quad k = 0, \ldots, n-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto, tendo em atenção (I.2.1)

$$\boldsymbol{\alpha'_n} = \boldsymbol{\alpha_n} + \sum_{k=1}^{s+2} a_{n+k,n+1} \boldsymbol{\alpha_{n+k}} \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

Considere-se $n = 0$ nesta equação e tomemos derivadas depois de aplicar (I.2.2) e (I.2.1)

$$-\frac{P_1}{\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle} \boldsymbol{u} = D \left(\left(\frac{1}{\langle \boldsymbol{u}, 1 \rangle} + \sum_{k=1}^{s+2} a_{k,1} \frac{P_k}{\langle \boldsymbol{u}, P_k^2 \rangle} \right) \boldsymbol{u} \right)$$

então temos (5.2) onde $\phi_{s+2}(x) = -\frac{\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, 1 \rangle} \left(1 + \sum_{k=1}^{s+2} \frac{a_{k,1}}{\prod_{j=1}^{k} \gamma_j} P_k \right)$. ■

OBSERVAÇÃO . Como consequência do teorema anterior vamos procurar a nossa sucessão de polinómios ortogonais mónicos, entre as sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas cuja correspondente funcional linear verifique (5.2). Belmehdi [**13**] apresentou alguns exemplos de sucessões de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas, $\{P_n\}$ associadas a funcionais lineares, $\boldsymbol{u}$, que verificam (5.2) com $s = 1$. A funcional linear $\boldsymbol{u}$ é definida em termos das funcionais lineares clássicas $\boldsymbol{v}$ por $(x - c)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ para algum $c \in \mathbb{C}$. Neste caso $\{P_n\}$ pode ser descrito em termos da sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$, $\{R_n\}$, por

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= R_{n+1} - a_{n+1} R_n \,, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (5.3) \\ P_0 &= R_0 \end{aligned}$$

onde $a_{n+1} = \frac{R_{n+1}(c; -u_0^{-1})}{R_n(c; -u_0^{-1})}$, $u_0 = \langle \boldsymbol{u}, 1 \rangle$ e $\{R_n(x; d)\}$ sucessão de polinómios ortogonais mónicos co-recursiva.

Belmehdi provou que neste caso $\{R_n\}$ não pode ser a sucessão de polinómios ortogonais mónicos de Hermite. Note-se além do mais que o estudo realizado por Belmehdi não inclui todos os casos de sucessões de polinómios ortogonais mónicos que verificam (5.3).

Podemos enunciar o seguinte resultado:

TEOREMA 5.2. *Se* $\{R_n\}$ *é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica, então a sucessão de polinómios ortogonais mónicos* $\{P_n\}$ *associada à funcional linear* $\boldsymbol{u}$ *definida por* (5.3) *é semi clássica de classe* ≤ 1 *mas não pode ser escrita como uma combinação linear finita de derivadas de* $\{P_n\}$.

DEMONSTRAÇÃO. O carácter semi clássico da funcional linear $\boldsymbol{u}$ foi provado por Belmehdi em [**13**].

Do Teorema IV.5.2 como $\{R_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica

$$R_n = \frac{R'_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n-1}^{n} a_{n,k}\frac{R'_k}{k}\,, \quad n \geq 2$$

com $a_{n,n-1} \neq (n-1)\gamma_n$ para $n \geq 2$; então, de (5.3) obtemos

$$P_{n+1} = \frac{P'_{n+2}}{n+2} + s_{n+1}\frac{P'_{n+1}}{n+1} + t_{n+1}\frac{P'_n}{n} - (a_{n+1}a_{n,n-1} - \frac{(n-1)t_{n+1}a_n}{n})\frac{R'_{n-1}}{n-1}$$

onde

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= a_{n+1,n+1} - a_{n+1} + \frac{(n+1)a_{n+2}}{n+2} \\ t_{n+1} &= a_{n+1,n} - a_{n+1}a_{n,n} + \frac{ns_{n+1}a_{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ onde a_n vem definido por (5.3) e $a_{n,n}, a_{n,n-1}$ vem dado na Tabela 1. ∎

OBSERVAÇÃO . Temos aqui um exemplo de sucessão de polinómios ortogonais mónicos semi clássicas de classe um, associadas a uma funcional linear que verifica (5.2) e não pode escrever-se como combinação linear finita das suas derivadas.

Se $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$ verificando (5.2) então $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos de *Jacobi Generalizada* (cf. Magnus [**91**]).

Um exemplo de sucessão de polinómios ortogonais mónicos de Jacobi generalizada, $\{P_n\}$, tal que

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\frac{P'_k}{k}$$

com $a_{n,k} \neq 0$ para $k = 1, \ldots, n$ foi-nos apresentada por Magnus com a ajuda de um computador.

Pode daqui depreender-se que não existem sucessões de polinómios ortogonais mónicos que possam escrever-se como combinação de quatro derivadas consecutivas.

Vamos provar que não existem sucessões de polinómios ortogonais mónicos que satisfaçam as equações (5.1) e (5.2) com $a_{n,n-(s+1)} \neq 0$ e $s \geq 1$. Com o objectivo de tornar mais clara a demonstração, vamos fazê-la somente para o caso $s > 1$. Comecemos por enunciar alguns resultados auxiliares (cf. [**35**]):

LEMA V.1. *Se $\{P_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$ e verifica a relação de recorrência a três termos* (1.2) *então*

(a) $\gamma_{n+1} = \dfrac{\langle \boldsymbol{u}, x^{n+1} P_{n+1} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, x^n P_n \rangle}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\dfrac{\langle \boldsymbol{u}, x^{n+1} P_n \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, x^n P_n \rangle} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k$, $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos então admite a seguinte representação

$$P_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k x^{n-1} + \left(\sum_{0 \leq i < j \leq n-1} \beta_i \beta_j - \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \right) x^{n-2} + \ldots$$

Agora, como $\beta_n = \frac{\langle \boldsymbol{u}, x P_n^2 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2 \rangle}$ obtemos

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{\langle \boldsymbol{u}, x(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k x^{n-1} + \ldots) P_n \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2 \rangle} \\ &= \frac{\langle \boldsymbol{u}, x^{n+1} P_n \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, P_n^2 \rangle} - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \end{aligned}$$

donde se conclui que se tem (b). Para obter (a) temos somente que multiplicar (1.2) por P_{n-1} e aplicar $\boldsymbol{u}$. ■

LEMA V.2. *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos semi clássica de classe um associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$; se $\boldsymbol{u}$ verifica $D(\phi \boldsymbol{u}) = P_1 \boldsymbol{u}$ onde $\phi(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$ com $a_0 \neq 0$ então:*

(a) $\langle \phi \boldsymbol{u}, P_{n-1} P'_{n+1} \rangle = -a_0 (n-1) \langle \boldsymbol{u}, P_{n+1}^2 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}^+$;

(b) $\langle \phi \boldsymbol{u}, P_m P'_{n+1} \rangle = 0$, $0 \leq m \leq n-2$, $n \geq 2$ *ou* $m \geq n+4$;

(c) $\langle \phi \boldsymbol{u}, P_n P'_{n+1}\rangle = -(a_0(n(\beta_n+\beta_{n+1})+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k)+na_1+1)\langle \boldsymbol{u}, P^2_{n+1}\rangle$, $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Se substituirmos na Definição I.3.1, p_n por $\frac{P'_{n+1}}{n+1}$, $\boldsymbol{u}$ por $\phi\boldsymbol{u}$ e s por 1, obtemos

$$\langle \phi \boldsymbol{u}, P'_{m+1}P'_{n+1}\rangle = 0\,, \quad |n-m| \geq 2$$

$$\exists r \geq 1 : \langle \phi \boldsymbol{u}, P'_r P'_{r+1}\rangle \neq 0.$$

Mas, como $\{\frac{P'_{n+1}}{n+1}\}$ é uma sucessão de polinómios mónicos podemos reescrever estas condições como

$$\langle \phi \boldsymbol{u}, P_m P'_{n+1}\rangle = 0\,, \quad 0 \leq m \leq n-2\,, \quad n \geq 2 \;\text{ ou }\; m \geq n+4 \tag{5.4}$$

$$\exists r \geq 1 : \langle \phi \boldsymbol{u}, P_{r-1}P'_{r+1}\rangle \neq 0\,. \tag{5.5}$$

(a). Sabemos que $P_{r-1}P'_{r+1} = (P_{r-1}P_{r+1})' - P'_{r-1}P_{r+1}$. Assim de (5.5) obtemos

$$\begin{aligned}\langle \phi \boldsymbol{u}, P_{r-1}P'_{r+1}\rangle &= -\langle D(\phi u), P_{r-1}P_{r+1}\rangle - \langle \phi \boldsymbol{u}, P'_{r-1}P_{r+1}\rangle \\ &= -\langle P_1 \boldsymbol{u}, P_{r-1}P_{r+1}\rangle - a_0\langle \boldsymbol{u}, P^2_{r+1}\rangle \\ &= -a_0\langle \boldsymbol{u}, P^2_{r+1}\rangle\,.\end{aligned}$$

(c). Tome-se $m = n$ em (5.4) e usando a mesma técnica do Lema V.1 obtemos

$$\begin{aligned}\langle \phi \boldsymbol{u}, P_n P'_{n+1}\rangle = -\langle \boldsymbol{u}, P^2_{n+1}\rangle &- \\ &n\langle \boldsymbol{u}, (a_0x^3+a_1x^2)(nx^{n-1}-(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k x^{n-2}+\dots)P_{n+1}\rangle \\ &= -(a_0(n(\beta_n+\beta_{n+1})+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k)+na_1+1)\langle \boldsymbol{u}, P^2_{n+1}\rangle\,.\end{aligned}$$

Note-se que (b) coincide com (5.4). ∎

Estamos em condições de provar o seguinte resultado.

TEOREMA 5.3. *Sejam $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos semi clássica de classe um associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$, e $\boldsymbol{u}$ verifica $D(\phi\boldsymbol{u}) = P_1\boldsymbol{u}$ onde $\phi(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ com $a_0 \neq 0$; então admite a seguinte representação em termos das derivadas*

$$P_n = \frac{P'_{n+1}}{n+1} + \sum_{k=2}^{n} b_{n,k}\frac{P'_k}{k} \tag{5.6}$$

para $n \in \mathbb{N}$ com $b_{n,2} \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração consiste nos seguintes passos:

— Multiplicar sucessivamente a equação (5.6) por P_j com $j = 0, 1, \ldots, n-4$ e aplicar a funcional linear $\phi\boldsymbol{u}$ à equação resultante.

Temos assim para $j = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= b_{n,1}\langle \phi\boldsymbol{u}, P_1' \rangle + \frac{b_{n,2}}{2}\langle \phi\boldsymbol{u}, P_2' \rangle + \frac{b_{n,3}}{3}\langle \phi\boldsymbol{u}, P_3' \rangle \\ &= -b_{n,1}\langle \boldsymbol{u}, P_1^2 \rangle - \frac{b_{n,2}}{2}\langle \boldsymbol{u}, P_2P_1 \rangle - \frac{b_{n,3}}{3}\langle \boldsymbol{u}, P_3P_1 \rangle \end{aligned}$$

i.e. $b_{n,1} = 0$.

Para $j = 1$, e usando a mesma técnica, vem $\frac{b_{n,3}}{3} = -\frac{1+a_1+a_0(\beta_0+\beta_1+\beta_2)}{a_0\gamma_3}\frac{b_{n,2}}{2}$.

Proceder da mesma forma até $j = n-4$. Aí obtemos $b_{n,n-2}$ em termos de $b_{n,2}$. Agora se considerarmos $b_{n,2} = 0$ temos $b_{n,k} = 0$, para $k = 2, \ldots, n-2$, i.e. $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica, em contradição com as hipóteses do teorema. ∎

Como conclusão podemos enunciar a seguinte condição de ortogonalidade:

TEOREMA 5.4. *Se $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios mónicos que verifica* (5.1) *com $a_{n,n-(s+1)} \neq 0$ para $n \geq s+2$ e s não depende de n então $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos se e somente se $s = 0$.*

OBSERVAÇÃO . Das relações (5.6) e (1.2), e usando o mesmo procedimento do Teorema IV.5.2, obtemos a seguinte relação para as derivadas válida para $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$x\frac{P_n'}{n} = \frac{P_{n+1}'}{n+1} + (\beta_n - \frac{b_{n,n}}{n})\frac{P_n'}{n} + \frac{(n-1)\gamma_n - b_{n,n-1}}{n}\frac{P_{n-1}'}{n-1} - \sum_{k=2}^{n-2}\frac{b_{n,k}}{n}\frac{P_k'}{k}\,.$$

PARTE C

Geração de Sucessões de Polinómios Ortogonais Mónicos

CAPÍTULO VI

Problemas Inversos sobre a Recta Real

1.	**Introdução**	**141**
2.	**Problema Directo**	**145**
3.	**Problema Real Inverso**	**150**
4.	**Exemplos**	**153**
5.	**Fórmulas Assimptóticas**	**154**
6.	**Estabilidade na Classe $M(a,b)$**	**158**

1. Introdução

Neste capítulo pretendemos apresentar o trabalho que realizámos conjuntamente com Marcellán em [**24**] bem como apresentar vários problemas, que o motivaram por um lado e que generalizámos por outro.

A geração de família de polinómios ortogonais a partir de uma dada famílias de polinómios ortogonais é um problema muito importante para a resolução de problemas de Física-Matemática, pois muitas vezes nos aparecem aí sucessões de polinómios ortogonais mónicos que ainda não estão estudadas. Acontece porém que, a maior parte das vezes, depois de uma análise cuidada verificamos que elas não são mais do que combinações lineares finitas de sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas.

Em 1969 Uvarov [**147**], [**118**] apresentou a seguinte generalização de um resultado devido a Christoffel [**36**]:

TEOREMA 1.1. *Sejam μ_1, μ_2 duas medidas de Borel com suporte no conjunto infinito $I \subset \mathbb{R}$ e tal que $d\mu_2 = \frac{d\mu_1}{q(x)}$ onde $q(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - x_i)$ tem as suas raízes em $\mathbb{R}\backslash I$. Então, denotando por $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ as sucessões de polinómios ortogonais mónicos relativamente a μ_1 e μ_2, respectivamente temos*

$$R_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} P_n(x) & \dots & P_{n-l}(x) \\ Q_n(x_1) & \dots & Q_{n-l}(x_1) \\ & \dots & \\ Q_n(x_l) & \dots & Q_{n-l}(x_l) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_{n-1}(x_1) & \dots & Q_{n-l}(x_1) \\ & \dots & \\ Q_{n-1}(x_l) & \dots & Q_{n-l}(x_l) \end{vmatrix}} \tag{1.1}$$

onde

$$Q_n(s) = \int_I \frac{P_n(t)}{t - s} d\mu_1(t)$$

Assim,

$$R_n(x) = P_n(x) + a_n^{(1)} P_{n-1}(x) + \cdots + a_n^{(l)} P_{n-l}(x)\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.2}$$

com $a_n^{(l)} \neq 0$.

Estamos interessados no recíproco deste resultado com $l = 2$. Note-se que todos os resultados a que chegarmos são generalizáveis para $l > 2$. Além disso, trabalharemos com uma noção de ortogonalidade mais geral do que estes autores utilizaram.

PROBLEMA VI.1. *Sejam* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear* $\mathbf{u}$ *e* $\{R_n\}$ *a sucessão de polinómios mónicos definida por* (1.2) *com* $l=2$. *Determinar condições necessárias e suficientes por forma que* $\{R_n\}$ *seja uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos e dar uma representação para a funcional linear que lhe está associada.*

Este problema foi alvo de estudo no caso em que $l=1$ e a_n^1 constante não dependente de n por Chihara [**35**]. O caso em que $l=1$ e a_n^1 depende de n pode ser visto no trabalho de Iserles et al. [**73**] bem como no estudo por nós realizado em [**19**]. O caso geral com a_n^j constantes independentes de n foi realizado por Peherstorfer em [**124**].

Este problema está também relacionado com novas fórmulas de quadratura, como se depreende da análise dos trabalhos de Peherstorfer [**123**] e Xu [**152**].

Podemos ainda ver este problema como surgido duma generalização do trabalho do Geronimus [**54**], onde este deu uma demonstração do Teorema de Hahn para sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas. Na demonstração desse resultado utilizou a seguinte representação satisfeita pelas sucessões de polinómios ortogonais mónicos clássicas

$$P_{n+2}(x)=\frac{P'_{n+3}}{n+3}(x)+a_{n+2}\frac{P'_{n+2}}{n+2}(x)+b_{n+2}\frac{P'_{n+1}}{n+1}(x)\,,\quad n\in\mathbb{N}$$
$$P_1(x)=\frac{P'_2}{2}(x)+a_1P'_1(x)\,,\quad P_0(x)=1.$$

Geronimus apresentou ainda um outro problema (ver [**55**]):

PROBLEMA VI.2. *Construir uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos,* $\{P_n\}$, *que satisfaça*

$$xP_{n+s+1}=P_{n+s+2}+\beta_{n+s+1}P_{n+s+1}+\gamma_{n+s+1}P_{n+s}\,,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Note-se que deixamos arbitrários os primeiros s coeficientes e consequentemente os s primeiros P_j. Quando $\beta_{n+s+1}=0$ e $\gamma_{n+s}=\frac{1}{4}$, $n\in\mathbb{N}$ damos a representação da medida associada a $\{P_n\}$. Isto porque $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada aos polinómios ortogonais de Tchebychev de segunda espécie (ver Exemplo 4.1).

Recentemente, e independentemente do trabalho por nós realizado em [**24**], Wimp e Kiesel [**77**] deram condições necessárias e suficientes sobre os parâmetros a_n, b_n para que a sucessão de polinómios mónicos $\{R_n\}$ definida à custa dos polinómios ortogonais de Tchebychev de segunda espécie $\{U_n\}$ por

$$R_n(x) = (a_n x + b_n)U_{n-1}(x) + (1 - a_n)U_n(x)$$

seja ortogonal.

Como se vê facilmente este trabalho é um caso particular do que por nós foi realizado e que aqui vamos expor.

Vamos apresentar um resultado devido a Peherstorfer [**124**, Cor. 5] e que é o mais geral conhecido até à publicação do nosso trabalho:

TEOREMA 1.2. *Sejam $\{T_n\}$ e $\{U_n\}$ as sucessões de polinómios ortogonais mónicos de Tchebychev de primeira e segunda espécie, i.e.*

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad e \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}\,.$$

Sejam $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ as sucessões de polinómios mónicos definidas em termos de $\{T_n\}$ e $\{U_n\}$ por

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{m^1+m^2} d_j T_{n-(m^1+m^2)+j}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$R_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{m^1+m^2} d_j U_{n-1-(m^1+m^2)+j}(x)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Se denotarmos por

$$\sum_{j=0}^{m^1+m^2} d_j x^j = \prod_{j=1}^{m_*^1}(x - x_j)^{m_j^1} \prod_{j=1}^{m_*^2}(x - \tilde{x}_j)^{m_j^2}$$

com $|x_j| < 1$ e $|\tilde{x}_j| > 1$ e

$$\rho(x) = \left| \sum_{k=0}^{m^1+m^2} d_k e^{ik\theta} \right|^2 \quad com\ x = \cos\theta\ e\ \theta \in [0, \pi]$$

então

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\rho(x)} + \sum_{j=1}^{m_*^2} \frac{2}{(m_j^2 - 1)!} \left(\frac{x^k P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}\rho_x(x)} \right)^{(m_j^2-1)} (\tilde{x}_j) = 0 \quad (1.3)$$

para $j = 0, \ldots, n-1$ *onde* $\rho_x(x) = \frac{\rho(x)}{x-\tilde{x}_j}$ *e*

$$\int_{-1}^{1} x^k R_n(x) \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{\rho(x)} + \sum_{j=1}^{m_*^2} \frac{2}{(m_j^2-1)!} \left(\frac{x^k\sqrt{1-x^2}P_n(x)}{\rho_x(x)} \right)^{(m_j^2-1)} (\tilde{x}_j) = 0 \quad (1.4)$$

para $j = 0, \ldots, n-2$.

Note-se que este trabalho é mais uma extensão do realizado por Chihara em [**35**], mas Peherstorfer deu em (1.3) e (1.4) uma interessante representação para as medidas associadas às novas sucessões de polinómios ortogonais mónicos.

Na verdade, dentro do caso em que a_n^j são constantes independentes de n pouco mais se poderia fazer, pois este resultado mantem-se válido se substituirmos os polinómios de Tchebychev de primeira e segunda espécie por uma qualquer sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{T_n\}$ juntamente com a sua associada de primeira espécie $\{U_n\}$.

Vamos dar um método para o estudo do Problema VI.1. Este baseia-se em relacionar este problema com outro que lhe é equivalente:

PROBLEMA VI.3 (Directo). *Seja* $\boldsymbol{u}$ *uma funcional linear regular. Dar condições necessárias e suficientes para que a funcional linear* $\boldsymbol{v}$ *definida por*

$$\boldsymbol{u} = p(x)\boldsymbol{v} \quad com \quad p \in \mathbb{P}_2$$

seja regular.

Este problema foi estudado por Maroni quando p é um polinómio de grau um (ver [**102**]) e quando p é um polinómio de grau dois com $x_1 = x_2$ (ver [**103**]). Neste último caso, ele não deu a demonstração deste resultado. As condições a que chegámos aqui são diferentes das obtidas por Maroni.

A estrutura deste capítulo é a seguinte:

- A secção 2 é dedicada ao estudo do problema directo. Além disso, damos no Teorema 2.1 a relação entre os parâmetros das relações de recorrência a três termos que as sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas a $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ verificam.

- Na secção 3 estudamos o Problema VI.1. O Teorema 3.1 dá-nos a caracterização destas sucessões de polinómios de uma forma construtiva.
- Damos na secção 4 dois exemplos ilustrativos da aplicação do Teorema 3.1.
- Apresentamos na secção 5 um estudo do comportamento assimptótico destas famílias de polinómios ortogonais. Para tal vamos estabelecer um resultado análogo do Teorema de Gončar (ver Teorema 5.1).
- Com o objectivo de estudarmos a localização das raízes da sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{R_n\}$ vamos provar na secção 6 que a funcional linear $\boldsymbol{v}$ que lhe está associada pertence à classe $M(a,b)$ sempre que a funcional linear de partida $\boldsymbol{u}$ lá estiver.

2. Problema Directo

Esta secção está motivada por algumas modificações consideradas na literatura dos polinómios ortogonais e tratadas na Parte A. Por exemplo, alguns casos de polinómios de Bernstein-Szegő que aparecem estudados em [**35, 63, 64**] e [**143**, T. 2.6] (cf. Secção 6.1 do Capítulo II.), são ortogonais relativamente às funções peso

$$w(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{-1/2}(\rho(x))^{-1} \\ (1-x^2)^{1/2}(\rho(x))^{-1} \\ (\frac{1-x}{1+x})^{1/2}(\rho(x))^{-1} \end{cases}$$

onde ρ é um polinómio positivo e de grau fixo definido em $[-1,1]$. Estes polinómios podem ser representados em termos dos de Tchebychev de primeira e segunda espécie, como pode ser visto a partir de (1.1).

Aqui vamos resolver um problema mais geral por nós enunciado em [**19**]:

TEOREMA 2.1. *Sejam $\boldsymbol{u}$ uma funcional linear e $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos que lhe está associada, i.e.*

$$\begin{aligned} &xP_{n+1}(x) = P_{n+2}(x) + \beta_{n+1}P_{n+1}(x) + \gamma_{n+1}P_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ &P_1(x) = x - \xi_0\,, \quad P_0(x) = 1\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Tome-se $u_0 = 1$ *e* $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{C}$. *A funcional linear* $\boldsymbol{v}$ *definida por* $\boldsymbol{u} = (x-x_1)(x-x_2)\boldsymbol{v}$ *é regular se e somente se* $v_0 \neq 0$ *e* v_1 *são tais que*

$$\begin{aligned} &\frac{x_2v_0 - v_1}{x_2 - x_1}(x_1 - v_1)^2 + \frac{v_1 - x_1v_0}{x_2 - x_1}(x_2 - v_1)^2 \neq 1 \\ &|d_n| \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Seja

$$d_n = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{v_1 - x_2v_0}) & P_n(x_1; -\frac{1}{v_1 - x_2v_0}) \\ P_{n+1}(x_2; -\frac{1}{v_1 - x_1v_0}) & P_n(x_2; -\frac{1}{v_1 - x_1v_0}) \end{bmatrix}$$

e v_0,v_1 *os primeiro e segundo momentos de* $\boldsymbol{v}$, *respectivamente. Assim, a sucessão de polinómios ortogonais mónicos relativamente a* $\boldsymbol{v}$ *vem dada por*

$$\begin{aligned} &R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + a_{n+2}P_{n+1}(x) + b_{n+2}P_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ &R_1(x) = P_1(x) + a_1P_0(x) \\ &R_0(x) = P_0(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1; -\frac{1}{v_1 - x_2v_0}) \\ P_{n+2}(x_2; -\frac{1}{v_1 - x_1v_0}) \end{bmatrix}\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.4}$$

e $a_1 = \beta_0 - v_1$. *Os coeficientes da correspondente relação de recorrência a três termos*

$$\begin{aligned} &xR_{n+1}(x) = R_{n+2}(x) + \xi_{n+1}R_{n+1}(x) + \eta_{n+1}R_n(x)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ &R_1(x) = x - \xi_0\,, \quad R_0(x) = 1 \end{aligned} \tag{2.5}$$

vêm dados em termos de (β_n) *e* (γ_n) *de* (2.1) *por*

$$\begin{aligned} &\xi_n = \beta_n - (a_{n+1} - a_n)\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\eta_{n+3} = \frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\gamma_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ &\eta_1 = \gamma_1 + a_1(\beta_0 - \xi_1) - b_2 \\ &\eta_2 = \gamma_2 + a_2(\beta_1 - \xi_2) - (b_3 - b_2)\,. \end{aligned}$$

LEMA VI.1. *Sejam* $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *as funcionais lineares definidas no Teorema 2.1; então*

$$\boldsymbol{v} = (x-x_1)^{-1}(x-x_2)^{-1}\boldsymbol{u} + \frac{x_2v_0 - v_1}{x_2 - x_1}\delta_{x_1} + \frac{v_1 - x_1v_0}{x_2 - x_1}\delta_{x_2} \tag{2.6}$$

onde δ_{x_i} *representa a distribuição delta de Dirac no ponto* x_i.

Demonstração do Lema. Necessitamos determinar

$$(x-x_1)^{-1}(x-x_2)^{-1}((x-x_1)(x-x_2)\boldsymbol{v})$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\langle (x-x_1)^{-1}(x-x_2)^{-1}((x-x_1)(x-x_2)\boldsymbol{v}), f(x)\rangle \\
&\qquad = \langle (x-x_1)(x-x_2)\boldsymbol{v}, \frac{\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x-x_2}\rangle \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{v}, f(x)+\frac{x-x_2}{x_2-x_1}f(x_1)-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)\rangle \\
&\qquad = \langle \boldsymbol{v}+\frac{v_1-x_2v_0}{x_2-x_1}\delta_{x_1}+\frac{x_1v_0-v_1}{x_2-x_1}\delta_{x_2}, f(x)\rangle;
\end{aligned}$$

donde se tem (2.6). ■

Demonstração do Teorema. Do lema anterior, vemos claramente que as condições necessárias e suficientes para que a funcional linear $\boldsymbol{v}$ seja regular virão dadas em termos de x_1, x_2, v_0 e v_1. De facto, como $\{P_n\}$ é uma base de $\mathbb{P}$, temos que $R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}P_k(x)$, onde os coeficientes $a_{n,k}$ vêm dados por:

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}, P_k^2\rangle a_{n,k} &= \langle \boldsymbol{v}, (x-x_1)(x-x_2)R_{n+2}P_k\rangle \\
&= \begin{cases} 0 & , \quad k=0,1,\ldots,n-1 \\ \langle \boldsymbol{v}, R_{n+2}^2\rangle & , \quad k=n \\ \langle \boldsymbol{v}, (x-x_1)(x-x_2)R_{n+2}P_{n+1}\rangle & , \quad k=n+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

e portanto,

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + a_{n+2}P_{n+1}(x) + b_{n+2}P_n(x), \tag{2.7}$$

onde $a_{n+2} = a_{n,n+1}$ e $b_{n+2} = a_{n,n}$; logo, da definição de ortogonalidade (I.1.1) a condição necessária para que a funcional linear $\boldsymbol{v}$ seja regular é que $b_{n+2} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

De (I.3.2), a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$ é quase-ortogonal de ordem dois associada a $\boldsymbol{u}$. Agora, se substituirmos na Definiçãa I.3.1 $\boldsymbol{u}$ por $(x-x_1)(x-x_2)v$ obtemos que $\boldsymbol{v}$ é regular (pois $\boldsymbol{v}$ é quase-ortogonal de ordem dois relativamente a $\boldsymbol{u}$, i.e $b_{n+2} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$), se e somente se:

i.1 $\langle \boldsymbol{v}, R_{n+1}\rangle = 0$ para $n \in \mathbb{N}$,

i.2 $\langle \boldsymbol{v}, xR_{n+2}\rangle = 0$ para $n \in \mathbb{N}$,

i.3 $\langle \boldsymbol{v}, R_1^2\rangle \neq 0$.

Escrevamos estas condições em termos das condições iniciais:

- De i.1 com $n = 0$ obtemos $a_1 = \beta_0 - v_1$.

- De i.3 e tendo em conta a última expressão de a_1

$$\frac{x_2v_0 - v_1}{x_2 - x_1}(x_1 - v_1)^2 + \frac{v_1 - x_1v_0}{x_2 - x_1}(x_2 - v_1)^2 \neq 1\,.$$

- De $\begin{cases} \langle \boldsymbol{v}, R_{n+2}\rangle = 0 \\ \langle \boldsymbol{v}, xR_{n+2}\rangle = 0 \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$, concluímos que

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{v}, (x - x_1)R_{n+2}\rangle = 0 \\ \langle \boldsymbol{v}, (x - x_2)R_{n+2}\rangle = 0 \end{cases} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Estas duas expressões são suficientes para calcular a_{n+2} e b_{n+2}:

- Substituindo x por x_1 em (2.7) e substraindo de (2.7) a equação encontrada, obtemos, depois de dividir por $x - x_1$

$$\theta_{x_1}R_{n+2}(x) = \theta_{x_1}P_{n+2}(x) + a_{n+2}\theta_{x_1}P_{n+1}(x) + b_{n+2}\theta_{x_1}P_n(x). \tag{2.8}$$

Aplicando a funcional linear regular $\boldsymbol{u}$ a ambos os membros de (2.8) temos

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{v}, (x - x_2)(R_{n+2}(x) - R_{n+2}(x_1))\rangle \\ &\qquad = P^{(1)}_{n+1}(x_1) + a_{n+2}P^{(1)}_n(x_1) + b_{n+2}P^{(1)}_{n-1}(x_1)\,, \quad n \in \mathbb{N}; \end{aligned}$$

mas sabemos que $\langle \boldsymbol{v}, (x - x_2)R_{n+2}(x)\rangle = 0$, logo

$$\begin{aligned} &(v_1 - x_2v_0)R_{n+2}(x_1) \\ &\qquad = P^{(1)}_{n+1}(x_1) + a_{n+2}P^{(1)}_n(x_1) + b_{n+2}P^{(1)}_{n-1}(x_1)\,, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Usando o mesmo processo com x_2 em vez de x_1 obtemos

$$\begin{aligned} &(v_1 - x_1v_0)R_{n+2}(x_2) \\ &\qquad = P^{(1)}_{n+1}(x_2) + a_{n+2}P^{(1)}_n(x_2) + b_{n+2}P^{(1)}_{n-1}(x_2)\,, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

e tomando em consideração (2.7) obtemos

$$\begin{cases} -P_{n+2}(x_1; -\dfrac{1}{v_1 - x_2v_0}) = P_{n+1}(x_1; -\dfrac{1}{v_1 - x_2v_0})a_{n+2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + P_n(x_1; -\dfrac{1}{v_1 - x_2v_0})b_{n+2} \\ -P_{n+2}(x_2; -\dfrac{1}{v_1 - x_1v_0}) = P_{n+1}(x_2; -\dfrac{1}{v_1 - x_1v_0})a_{n+2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + P_n(x_2; -\dfrac{1}{v_1 - x_1v_0})b_{n+2} \end{cases} \tag{2.9}$$

e portanto, obtemos (2.4).

Logo

$$b_{n+2} = -\frac{|d_{n+1}|}{|d_n|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em conclusão:

— A funcional linear $\boldsymbol{v}$ é regular se e somente se (2.2) é verificada.

Para a determinação dos coeficientes da relação de recorrência a três termos (2.5) proceda-se da seguinte forma:

- Substituir R_{n+1} na equação (2.5) por $P_{n+1}(x)+a_{n+1}P_n(x)+b_{n+1}P_{n-1}(x)$ e aplicando a relação de recorrência (I.2.5) obtemos, depois de comparar os coeficientes de P_k com $k = n-2, n-1, n, n+1$,
  (a) $\eta_{n+1} = \frac{b_{n+1}}{b_n}\gamma_{n-1}$, $n \geq 2$
  (b) $a_{n+1}\gamma_n + b_{n+1}\beta_{n-1} = \xi_{n+1}b_{n+1} + \eta_{n+1}a_n$, $n \geq 1$
  (c) $\gamma_{n+1} + a_{n+1}\beta_n + b_{n+1} = b_{n+2} + \xi_{n+1}a_{n+1} + \eta_{n+1}$, $n \geq 0$
  (d) $\xi_{n+1} = \beta_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+1})$, $n \geq -1$.

E daqui o resultado segue. ■

Como caso limite temos o seguinte resultado apresentado em [**19**] e [**103**]:

COROLÁRIO VI.1. *Sejam $\boldsymbol{u}$ a funcional linear regular, $u_0 = 1$ e $x_1 \in \mathbb{C}$; a funcional linear $\boldsymbol{v}$ definida por $\boldsymbol{u} = (x - x_1)^2\boldsymbol{v}$ é regular, se e somente se $v_0 \neq 0$ e v_1 são tais que*

$$\frac{(v_1 - x_1v_0)^2}{v_0} \neq 1$$
$$|d_n| \neq 0, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

onde d_n é a matriz

$$\begin{bmatrix} P_{n+1}(x_1; -\frac{1}{v_1-x_1v_0}) & P_n(x_1; -\frac{1}{v_1-x_1v_0}) \\ (v_1-x_1v_0)P'_{n+1}(x_1; -\frac{1}{v_1-x_1v_0}) + v_0P_{n+1}(x_1) & (v_1-x_1v_0)P'_n(x_1; -\frac{1}{v_1-x_1v_0}) + v_0P_n(x_1) \end{bmatrix}$$

A sucessão de polinómios ortogonais mónicos correspondente, associada a $\boldsymbol{v}$ vem dada por

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + a_{n+2}P_{n+1}(x) + b_{n+2}P_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1; -\frac{1}{v_1-x_1v_0}) \\ (v_1 - x_1v_0)P'_{n+2}(x_1; -\frac{1}{v_1-x_1v_0}) + v_0P_{n+2}(x_1) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

e $a_1 = \beta_0 - \frac{v_1}{v_0}$. *Os coeficientes da relação de recorrência a três termos que* R_n *satisfaz* (2.5) *estão relacionados com os da (I.2.5) pelas seguintes fórmulas*

$$\xi_n = \beta_n - (a_{n+1} - a_n)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \eta_{n+3} &= \frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\gamma_{n+1}\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ \eta_1 &= \gamma_1 + a_1(\beta_0 - \xi_1) - b_2 \\ \eta_2 &= \gamma_2 + a_2(\beta_1 - \xi_2) - (b_3 - b_2)\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

3. Problema Real Inverso

A resposta ao problema principal deste capítulo vem dada pelo seguinte teorema.

TEOREMA 3.1. *Seja* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* $\boldsymbol{u}$ *e* $\{R_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais quase-ortogonal de ordem dois associada a* $\{P_n\}$*;* $\{R_n\}$ *é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos se e somente se, os parâmetros* $a_{n,n} = a_n$ *e* $a_{n,n-1} = b_n$ *de* (2.3) *verificam*

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= \frac{a_2}{b_2}\gamma_1 - \beta_2 - \beta_3 + a_3 - \frac{a_{n+3}}{b_{n+3}}\gamma_{n+2} + \beta_{n+3} + \beta_{n+2} \\ b_{n+4} &= b_{n+3}\left(1 - \frac{\gamma_{n+1}}{b_{n+2}}\right) + \gamma_{n+3} + a_{n+3}(\beta_{n+2} - \beta_{n+3} + a_{n+4} - a_{n+3}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$n \in \mathbb{N}$*, com condições iniciais*

(a) a_1, a_2, b_2, b_3 *se* $\begin{cases} a_1 = 0 \text{ e } a_3 = \beta_2 - \beta_0 + a_2 - \frac{a_2}{b_2}\gamma_1 \\ a_1 \neq 0\,, \quad b_2 - a_1 a_2 \neq 0 \text{ e} \\ a_3 = \frac{a_2\gamma_1 + b_2(\beta_0 - \beta_2 - a_2) - a_1(\gamma_2 + a_2(\beta_1 - \beta_2 - a_2) - b_3 + b_2)}{a_1 a_2 - b_2} \end{cases}$

(b) a_1, a_2, a_3, b_3 *se* $a_1 \neq 0$ *e* $b_2 = a_1 a_2$.

Além disso, a_1, a_2, a_3, b_2, b_3 *verifica*

$$\begin{aligned} &\gamma_2 + a_2(\beta_1 - \beta_2 + a_3 - a_2) - b_3 + b_2 \neq 0 \\ &\gamma_1 + a_1(\beta_0 - \beta_1 + a_2 - a_1) - b_2 \neq 0\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Neste caso, os coeficientes da relação de recorrência que $\{R_n\}$ *verifica vêm dados por*

$$\begin{cases} \xi_n = \beta_n - (a_{n+1} - a_n) \\ \eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + a_{n+1}(\beta_n - \xi_{n+1}) - (b_{n+2} - b_{n+1}) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

com as restrições $a_0 = b_1 = 0$.

Além disso, a funcional linear $\boldsymbol{v}$ *tal que* $\{R_n\}$ *é a correspondente sucessão de polinómios ortogonais mónicos vem dada por*

$$\boldsymbol{u} = p(x)\boldsymbol{v}, \tag{3.4}$$

onde $p(x) = \frac{1}{\langle \boldsymbol{v},1\rangle}\Big[(1+\frac{a_1^2}{\eta_1}+\frac{b_2^2}{\eta_1\eta_2})P_0(x)+(\frac{a_1}{\eta_1}+\frac{a_2b_2}{\eta_1\eta_2})P_1(x)+\frac{b_2}{\eta_1\eta_2}P_2(x)\Big]$.

OBSERVAÇÃO .

1. De (3.4) tendo em atenção o Teorema 2.1 e o seu corolário obtemos os coeficientes a_n e b_n:
   - Se $(\frac{a_1\eta_2}{b_2}-a_2)^2-4(\frac{\eta_1\eta_2}{b_2}+\frac{a_1^2\eta_2}{b_2}+b_2-\gamma_1)=0$ então temos (2.10).
   - Se $(\frac{a_1\eta_2}{b_2}-a_2)^2-4(\frac{\eta_1\eta_2}{b_2}+\frac{a_1^2\eta_2}{b_2}+b_2-\gamma_1)\neq 0$ então temos (2.4)).
2. A condição (3.1) dá-nos um algoritmo para o cálculo de (a_n, b_n). De facto, da primeira condição podemos calcular a_{n+4} em termos de $(a_k)_{k=2}^{n+3}$ e $(b_{k+1})_{k=1}^{n+2}$; e substituindo a_{n+4} na seguinte obtemos b_{n+4}.

DEMONSTRAÇÃO. De (I.3.2), existem duas sucessões $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$R_{n+2}(x) = P_{n+2}(x) + a_{n+2}P_{n+1}(x) + b_{n+2}P_n(x) \tag{3.5}$$

com $b_{n+2} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Multiplicando a equação (3.5) por x e usando (I.2.5) obtemos

$$\begin{aligned} xR_{n+2} = P_{n+3} + \beta_{n+2}P_{n+2} + \gamma_{n+2}P_{n+1} + a_{n+2}(P_{n+2} + \beta_{n+1}P_{n+1} \\ + \gamma_{n+1}P_n) + b_{n+2}(P_{n+1} + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}) \end{aligned}$$

Aplicando duas vezes (3.5) temos

$$\begin{aligned} xR_{n+2} = R_{n+3} + \xi_{n+2}R_{n+2} + \eta_{n+2}R_{n+1} + (a_{n+2}\gamma_{n+1} - \\ a_{n+1}\eta_{n+2} + b_{n+2}(\beta_n - \xi_{n+2}))P_n + (b_{n+2}\gamma_n - b_{n+1}\eta_{n+2})P_{n-1} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} \xi_n = \beta_n - (a_{n+1} - a_n) \\ \eta_{n+1} = \gamma_{n+1} + a_{n+1}(\beta_n - \xi_{n+1}) - (b_{n+2} - b_{n+1}) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Logo, $\{R_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos se e somente se

$$\begin{cases} \gamma_{n+1} + a_{n+1}(\beta_n - \xi_{n+1}) - (b_{n+2} - b_{n+1}) \neq 0 \\ a_{n+2}\gamma_{n+1} - a_{n+1}\eta_{n+2} + b_{n+2}(\beta_n - \xi_{n+2}) = 0 \ , \quad n \in \mathbb{N}\,. \\ b_{n+3}\gamma_{n+1} - b_{n+2}\eta_{n+3} = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Agora se substituirmos $\eta_{n+3} = \frac{b_{n+3}\gamma_{n+1}}{b_{n+2}}$ na segunda equação (3.7) e na expressão de η_{n+1} em (3.6) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+3}}{b_{n+3}}\gamma_{n+2} - \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}}\gamma_{n+1} + (a_{n+4} - a_{n+3}) - (\beta_{n+3} - \beta_{n+1}) &= 0 \\ \gamma_{n+3} + a_{n+3}(\beta_{n+2} - \beta_{n+3} + a_{n+4} - a_{n+3}) - (b_{n+4} - b_{n+3}) &= \frac{b_{n+3}\gamma_{n+1}}{b_{n+2}} \end{aligned}$$

e daqui, o algoritmo (3.1) sai directamente.

Agora $\{R_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear regular $\boldsymbol{v}$. Procuremos a relação existente entre estas duas funcionais:

- Se aplicarmos a funcional linear $\boldsymbol{u}$ a (3.5) obtemos $\langle \boldsymbol{u}, R_{n+2}\rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Assim

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \boldsymbol{\alpha_i} \tag{3.8}$$

onde $(\boldsymbol{\alpha_n})$ é a base dual associada a $\{R_n\}$ e $\lambda_i = \langle \boldsymbol{u}, R_i\rangle$, $i = 0, 1, 2$. Como $\{R_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$ temos a partir de (I.2.3) $\boldsymbol{\alpha_n} = \frac{R_n}{\langle \boldsymbol{v}, R_n^2\rangle}\boldsymbol{v}$, $n \in \mathbb{N}$; e portanto (3.8) pode ser reescrita na forma

$$\boldsymbol{u} = \left(1 + \frac{a_1}{\eta_1}R_1(x) + \frac{b_2}{\eta_1\eta_2}R_2(x)\right)\frac{\boldsymbol{v}}{\langle \boldsymbol{v}, 1\rangle}.$$

Substituindo agora R_1, R_2 nesta expressão obtemos (3.4). ■

4. Exemplos

Vamos construir duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos quase-ortogonais de ordem 2 associada aos polinómios ortogonais de Tchebychev de segunda espécie, $\{U_n\}$, e Hermite, $\{H_n\}$.

EXEMPLO 4.1. $\{U_n\}$. Neste caso $\beta_n = 0$, $\gamma_{n+1} = \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$ (ver [**35**, Ex. 4.9]). Assim, se tomarmos para condições iniciais $a_1 = a_2 = 2a$ e $b_2 = b_3 =$

$-c \neq 0$, com $a, c \in \mathbb{C}$, obtemos por indução sobre (3.1) e considerações sobre as condições iniciais, que

$$\begin{cases} a_{n+3} = 2a \\ b_{n+4} = -c \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vê-se claramente que se tem (3.2).

Os coeficientes da relação de recorrência a três termos que $\{R_n\}$ verifica vêm dados por

$$\begin{cases} \xi_0 = -2a \\ \xi_{n+1} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \eta_1 = \frac{1}{4} + c \\ \eta_{n+2} = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Este é um exemplo de Al-Salam e Verma, [**6**]. Determinaram também a medida associada a $\{R_n\}$. As condições para que esta funcional seja definida positiva vem dada por $c > -\frac{1}{4}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Damos de seguida a funcional linear regular $\boldsymbol{v}$ (não definida positiva, porque $\eta_1 < 0$) em termos da funcional linear de Tchebychev de segunda espécie $\boldsymbol{u}$, no caso em que $a = 0$ e $c = -1$:

$$-\frac{16}{3v_0}\boldsymbol{v} = (\frac{9}{16} + x^2)^{-1}\boldsymbol{u} + \frac{v_0}{2}(\delta_{-\frac{3}{4}i} + \delta_{\frac{3}{4}i}).$$

Desta representação obtemos $\langle -\frac{16}{3v_0}\boldsymbol{v}, 1\rangle = v_0$, i.e $v_0 = -\frac{16}{3}$; portanto

$$\boldsymbol{v} = (\frac{9}{16} + x^2)^{-1}\boldsymbol{u} - \frac{8}{3}(\delta_{-\frac{3}{4}i} + \delta_{\frac{3}{4}i})\,. \qquad \blacksquare$$

COMENTÁRIO . Este resultado é mais geral do que o apresentado no Teorema 1.2, pois partindo de condições iniciais chegámos a uma representação para a medida do tipo daquela que Peherstorfer encontrou.

EXEMPLO 4.2. $\{H_n\}$. Neste caso sabemos que

$$\begin{cases} \beta_n = 0 \\ \gamma_{n+1} = \frac{n+1}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{(ver [**35**, Ex. 1.6]).}$$

Se tomarmos como condições $a_1 = a_2 = 0$ e $b_2 = b_3 = 1$ obtemos de (3.1) e considerações acerca das condições iniciais $a_3 = 0$,

$$\begin{cases} a_{n+4} = 0 \\ b_{n+4} = \frac{b_{n+3}}{b_{n+2}}\left(b_{n+2} - \frac{n+1}{2}\right) + \frac{n+3}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pode ver-se que $b_{2k+2} = b_{2k+3} = k + 1$ para $k \in \mathbb{N}$. De facto,

$k = 0$ $b_2 = b_3 = 1$. Por indução,

Se $b_{2k+2} = b_{2k+3} = k + 1$, $k \leq p$

Então $b_{2k+2} = b_{2k+3} = k+1$, $k = p+1$. De facto,

$$b_{2p+4} = \tfrac{2p+3}{2} + \tfrac{p+1}{p+1}\left(p+1-\tfrac{2p+1}{2}\right) = p+2$$

e

$$b_{2p+5} = \tfrac{2p+4}{2} + \tfrac{p+2}{p+1}\left(p+1-\tfrac{2p+2}{2}\right) = p+2.$$

A condição (3.2) é facilmente verificada.

Os coeficientes da relação de recorrência a três termos verificada por $\{R_n\}$ vêm dados por

$$\xi_n = 0 \;\text{ e }\; \eta_{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & , \quad n = 0 \\ k+1 & , \quad n = 2k+1 \;, \\ \frac{2k+1}{2} & , \quad n = 2k+2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

A funcional regular (não definida positiva) $\boldsymbol{v}$ vem dada em termos da funcional linear de Hermite, $\boldsymbol{u}$, por:

$$-\frac{2}{v_0}\boldsymbol{v} = x^{-2}\boldsymbol{u} + v_0\delta_0.$$

Desta representação obtemos $\langle -\frac{2}{v_0}\boldsymbol{v}, 1\rangle = v_0$, i.e $v_0 = -2$; portanto

$$\boldsymbol{v} = x^{-2}\boldsymbol{u} - 2\delta_0. \qquad \blacksquare$$

5. Fórmulas Assimptóticas

Vamos aplicar o método de Nikishin desenvolvido no Capítulo III por forma a obter fórmulas assimptóticas para as sucessões de polinómios ortogonais mónicos $\{R_n\}$, que se expressam em termos de uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$, cuja medida associada está na classe de Szegő, por (2.3). Comecemos por estabelecer um análogo do Teorema III.5.1.

TEOREMA 5.1. *Sejam $\{P_n\}$ e $\{R_n\}$ duas sucessões de polinómios ortogonais mónicos associadas às medidas de Borel positivas μ_1, μ_2 com $\mu_1 \in \mathcal{S}$. Se*

$$d\mu_1(x) = (x-x_1)(x-x_2)d\mu_2(x)$$

então

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\varphi(z)-\varphi(x_1)}{\varphi(z)}\,\frac{\varphi(z)-\varphi(x_2)}{\varphi(z)} \tag{5.1}$$

uniformemente para $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}\mu_1$, onde $\varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}$ para $|z| > 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Comecemos por calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n$. Vemos, da análise do Teorema 2.1 e Corolário VI.1 que a_n, b_n têm expressões distintas quando $x_1 \neq x_2$ ou $x_1 = x_2$. Vamos então analisar estes dois casos separadamente.

Caso $\mathbf{x_1 \neq x_2}$. Intercalando o produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{P_{n+2}(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{P_{n+2}(x_2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{P_{n+2}(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{P_{n+2}(x_2)} \end{bmatrix}$$

em (2.4) obtemos

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} + \frac{1}{v_1 - x_2 v_0} \frac{P_n^{(1)}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} & \frac{P_n(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} + \frac{1}{v_1 - x_2 v_0} \frac{P_{n-1}^{(1)}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} \\ \frac{P_{n+1}(x_2)}{P_{n+2}(x_2)} + \frac{1}{v_1 - x_1 v_0} \frac{P_n^{(1)}(x_2)}{P_{n+2}(x_2)} & \frac{P_n(x_2)}{P_{n+2}(x_2)} + \frac{1}{v_1 - x_1 v_0} \frac{P_{n-1}^{(1)}(x_2)}{P_{n+2}(x_2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{v_1 - x_2 v_0} \frac{P_{n+1}^{(1)}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} \\ 1 + \frac{1}{v_1 - x_1 v_0} \frac{P_{n+1}^{(1)}(x_2)}{P_{n+2}(x_2)} \end{bmatrix}$$

Dos Teoremas I.7.3 e de Markov

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{2}{\varphi(x_1)} \left(1 + \frac{\chi(x_1;\mu_1)}{v_1 - x_2 v_0}\right) & \left(\frac{2}{\varphi(x_1)}\right)^2 \left(1 + \frac{\chi(x_1;\mu_1)}{v_1 - x_2 v_0}\right) \\ \frac{2}{\varphi(x_2)} \left(1 + \frac{\chi(x_2;\mu_1)}{v_1 - x_1 v_0}\right) & \left(\frac{2}{\varphi(x_2)}\right)^2 \left(1 + \frac{\chi(x_2;\mu_1)}{v_1 - x_1 v_0}\right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\chi(x_1;\mu_1)}{v_1 - x_2 v_0} \\ 1 + \frac{\chi(x_2;\mu_1)}{v_1 - x_1 v_0} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\varphi(x_1)} \\ 1 & \frac{2}{\varphi(x_2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{2}{\varphi(x_1)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\varphi(x_2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= - \frac{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}{2(\varphi(x_1) + \varphi(x_2))} \begin{bmatrix} \frac{2}{\varphi(x_2)} & -\frac{2}{\varphi(x_1)} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\varphi(x_1)}{2} \\ \frac{\varphi(x_2)}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} \\ \frac{\varphi(x_1)}{2} \frac{\varphi(x_2)}{2} \end{bmatrix}$$

Caso $\mathbf{x_1 = x_2}$. Intercalando o produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{P_{n+2}(x_1)} & 0 \\ -\frac{P'_{n+2}(x_1)}{P^2_{n+2}(x_1)} & \frac{1}{P_{n+2}(x_2)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{P_{n+2}(x_1)} & 0 \\ -\frac{P'_{n+2}(x_1)}{P^2_{n+2}(x_1)} & \frac{1}{P_{n+2}(x_2)} \end{bmatrix}$$

em (2.10) obtemos

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = A^{-1} B^{-1}$$

onde

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} t_n & \frac{P_n(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} t_{n-1} \\ \left(\frac{P_{n+1}}{P_{n+2}}\right)'(x_1) t_n + \frac{P_{n+1}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} s_n & \left(\frac{P_n}{P_{n+2}}\right)'(x_1) t_{n-1} + \frac{P_n(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} s_{n-1} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} t_{n+1} \\ s_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{v_1 - x_1 v_0} \frac{P_{n+1}^{(1)}(x_1)}{P_{n+2}(x_1)} \\ \frac{1}{v_1 - x_1 v_0} \left(v_0 + \left(\frac{P_{n+1}^{(1)}}{P_{n+2}} \right)'(x_1) \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e dos Teoremas I.7.3 e de Markov obtemos depois de alguns cálculos

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi(x_1) \\ \left(\frac{\varphi(x_1)}{2}\right)^2 \end{bmatrix}$$

Vemos assim que em qualquer dos casos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= a = -\frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} \\ \lim_{n\to\infty} b_n &= b = \frac{\varphi(x_1)}{2} \frac{\varphi(x_2)}{2} \end{aligned}$$

e portanto

$$\left(t - \frac{\varphi(x_1)}{2}\right)\left(t - \frac{\varphi(x_2)}{2}\right) = t^2 + at + b \tag{5.2}$$

De (2.3) e (I.7.3) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n+2}(z)}{P_{n+2}(z)} = \left(\frac{2}{\varphi(z)}\right)^2 \left(\left(\frac{\varphi(z)}{2}\right)^2 + a \frac{\varphi(z)}{2} + b \right)$$

uniformemente para $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu_1$, e de (5.2) com $t = \frac{\varphi(z)}{2}$ sai (5.1). ∎

Estamos agora em condições de calcular a função de Szegő associada a μ_2.

TEOREMA 5.2. *A função de Szegő associada a μ_2 vem dada por*

$$D_{\mu_2}(z) = \frac{D_{\mu_1}(z)}{\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_2}\right)} \tag{5.3}$$

onde $z_j = \frac{1}{\varphi(x_j)}$, $j = 1, 2$.

DEMONSTRAÇÃO. De Teorema III.3.5 e da representação para R_n, (2.3), vemos que

$$\begin{aligned} R_{n+2}(\cos\theta) = \frac{1}{2^n} \frac{e^{in\theta}}{D_{\mu_1}(e^{i\theta})} & \left[\left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^2 + \frac{e^{i\theta}}{2} a + b \right] \\ & + \frac{1}{2^n} \frac{e^{-in\theta}}{D_{\mu_1}(e^{i\theta})} \left[\left(\frac{e^{-i\theta}}{2}\right)^2 + \frac{e^{-i\theta}}{2} a + b \right] + o(1) \end{aligned}$$

e por (5.2)

$$R_{n+2}(\cos\theta) = \frac{1}{2^{n+2}}\left(\frac{\overline{\alpha(e^{i\theta})}}{\overline{D_{\mu_1}(e^{i\theta})}}e^{in\theta} + \frac{\alpha(e^{i\theta})}{D_{\mu_1}(e^{i\theta})}e^{-in\theta}\right) + o(1) \tag{5.4}$$

onde

$$\alpha(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_2}\right)$$

com $z = e^{i\theta}$ e $z_j = \frac{1}{\varphi(x_j)}$, $j = 1, 2$.

Agora de (5.4) obtemos (5.3). ∎

Como $\mu_2 \in \mathcal{S}$, da alínea (d) do Teorema III.2.5 concluímos que a fórmula assimptótica de R_n em $|z| > 1$ vem dada por

$$R_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \frac{1}{\overline{D_{\mu_2}(z)}} + o(1)\,.$$

A fórmula assimptótica de R_n nos pontos x_1, x_2 obtem-se da mesma forma a partir de (III.5.12)

$$R_n(x_j) = \frac{2^{n+3} z_j^{n-1}}{M_j} \operatorname{Res}_{z=z_j} \bar{D}_{\mu_2}(z)(1 + o(1)) \tag{5.5}$$

onde $M_j = \operatorname{Res}_{z=z_j} \chi(z; \mu_2)$. Agora, de (5.3) obtemos

$$\operatorname{Res}_{z=z_j} \bar{D}_{\mu_2}(z) = \begin{cases} \frac{z_j^3 z_k}{z_j - z_k} D_{\mu_1}(z_j) & , \ x_j \neq x_k\,, \quad j \neq k = 1, 2 \\ z_1^4 D_{\mu_1}(z_1) & , \ x_1 = x_2 \end{cases}$$

que substituído em (5.3) nos dá a fórmula assimptótica de R_n em x_1, x_2.

Pode ver-se que todos estes resultados são generalizáveis a modificações do tipo

$$\mu_2(x) = \frac{\mu_1(x)}{\prod_{j=1}^{s}(x - x_j)} + \sum_{j=1}^{s} M_j \delta_{x_j}$$

tendo-se neste caso

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n(z)}{P_n(z)} = \prod_{j=1}^{s} \frac{\varphi(z) - \varphi(z_j)}{\varphi(z)}$$

uniformemente para $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} \mu_1$ e

$$D_{\mu_2}(z) = \frac{D_{\mu_1}(z)}{\alpha(z)}\,, \quad \alpha(z) = \prod_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_j}\right).$$

6. Estabilidade na Classe $M(a,b)$

Comecemos por analisar o que é que acontece se $\boldsymbol{u} \in M(a,b)$.

TEOREMA 6.1. *Sejam $\boldsymbol{u}$ uma funcional linear regular e $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos que lhe está associada. Se $\boldsymbol{u} \in M(a,b)$ então $\boldsymbol{v}$ definida por $\boldsymbol{u} = (x-x_1)(x-x_2)\boldsymbol{v}$ pertence a $M(a,b)$.*
Além disso, as raízes da sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{R_n\}$ associada a $\boldsymbol{v}$ estão em $[b-a-\epsilon, b+a+\epsilon]$ salvo possivelmente $2m(\epsilon)$ delas.

DEMONSTRAÇÃO. Vimos já que neste caso existem os limites das sucessões (a_n) e (b_n). Então de (3.3) obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$$
$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$$

logo $\boldsymbol{v} \in M(a,b)$. Assim, do Lema I.I.2 concluímos que as suas raízes estão em $[b-a-\epsilon, b+a+\epsilon]$ salvo possivelmente $2m(\epsilon)$ delas. ■

Peherstorfer [**122**] efectuou um estudo da localização das raízes de R_n definido à custa de P_n pertencente à classe de Szegő por (1.2). Peherstorfer dá-nos um critério para determinar o número de raízes de R_n no exterior de $[-1,1]$.

TEOREMA 6.2. *Seja $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida μ pertencente à classe de Szegő. Sejam $m(n) \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ não decrescente com $\lim_{n\to\infty}(n-m(n)) = \infty$, $\ell(n) \in \mathbb{N}$ com $0 \le \ell(n) \le m(n)$ e $a_{j,n} \in \mathbb{R}$ para $j = 0, \dots, m(n)$. Se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \ge n_0$*

$$\sum_{j=0}^{m(n)} 2^j a_{j,n} z^{n-j}$$

tem $m(n) - \ell(n)$ raízes no disco $|z| \le r < 1$, $\ell(n)$ raízes em $|z| \ge R < 1$ e $\sum_{j=0}^{m(n)} |a_{j,n}| q^j \le$ const., onde $q > 2\max\{r, 1/R\}$ então, para $n \ge n_0$ suficientemente grande

$$\sum_{j=0}^{m(n)} a_{j,n} P_{n-j}(x)$$

tem $n - \ell(n)$ raízes simples em $]-1,1[$ e $\ell(n)$ raízes em $\mathbb{C} \setminus [-1,1]$.

Se $m(n)$ é constante para $n \geq n_0$ o teorema é também válido para medidas μ cuja parte absolutamente contínua μ' é positiva a.e. em $[-1, 1]$.

CAPÍTULO VII

Polinómios Ortogonais Inversos

1. Introdução e Definição do Problema 163

2. Condição de Ortogonalidade 164

3. Método para a Inversão de Funcionais 166

4. Exemplo 169

   4.1 Caso Hermite 169

   4.2 Caso Laguerre 170

   4.3 Caso Jacobi 170

   4.4 Caso Bessel 171

5. Funcionais Lineares de Segundo Grau 171

1. Introdução e Definição do Problema

Este capítulo vai ser dedicado ao estudo da sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à inversa de uma funcional linear. Este problema foi estudado por Maroni e Guerfi em [**66**]. Apresentamos aqui algumas importantes generalizações. Antes de mais queremos destacar que no trabalho [**66**] os autores não apresentaram qualquer demonstração dos resultados apresentados. O nosso objectivo vai ser o de demonstrar os resultados simplesmente apresentados por estes autores e completar o estudo que estes fizeram acerca dos polinómios clássicos. Além disso faremos o estudo do comportamento assimptótico dos polinómios ortogonais associados à funcional linear inversa quando a inicial está na classe de Szegő.

Veremos que o problema fulcral deste capítulo é um caso particular do tratado no capítulo anterior.

Vamos considerar uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ associada a uma funcional linear $\boldsymbol{u}$, i.e. $\langle \boldsymbol{u}, P_nP_m\rangle = \kappa_n\delta_{n,m}$. Sabemos que podemos representar $\boldsymbol{u}$ à custa dos seus momentos $\langle \boldsymbol{u}, x^n\rangle = u_n$, $n \in \mathbb{N}$ por

$$\boldsymbol{u} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \frac{(-1)^n\delta_0^{(n)}}{n!}$$

e estabelecer a sua regularidade por

$$\Delta_n = \left|[u_{i+j}]_{i,j=0}^{n-1}\right| \neq 0\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Construamos uma funcional linear $\boldsymbol{v}$ obrigando os seus momentos, v_n, a satisfazer

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ 0 & u_0 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_n \\ v_{n-1} \\ \vdots \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Assim os v_n vêm dados por

$$v_n = \frac{(-1)^n}{u_0^{n+1}} \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_n \\ u_0 & \dots & u_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & u_1 \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

à funcional linear associada a (v_n) chamaremos *inversa* de $\boldsymbol{u}$, por analogia com a inversão de séries formais.

Aqui vamos dar condições necessárias e suficientes para a regularidade da nova funcional linear $\boldsymbol{v}$ definida à custa de $\boldsymbol{u}$ por (1.1), i.e. quando é que lhe podemos associar uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{R_n\}$.

OBSERVAÇÃO . A condição (1.1) é equivalente à equação $\boldsymbol{vu} = 1$ em termos das suas representações na base $\left\{\frac{\delta_0^{(n)}}{n!}\right\}$.

2. Condição de Ortogonalidade

De (1.1) pode ver-se que $v_0 \neq 0$. Mais,

TEOREMA 2.1. *A sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* $\boldsymbol{v}$, $\{R_n\}$, *admite a seguinte expressão*

$$R_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \\ u_0x + u_1 & u_0x^2 + u_1x + u_0 & \dots & \sum_{k=0}^n u_k x^{n-k} \end{vmatrix}}{u_0 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix}} \tag{2.1}$$

quando e só quando

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix} \neq 0\,, \quad n \geq 2.$$

DEMONSTRAÇÃO. Vejamos o que acontece a

$$u_0 \begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix} \langle \boldsymbol{u}, R_n \rangle = \begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n-1} \\ u_0v_1 + u_1v_0 & \dots & \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Consideremos agora

$$u_0 \begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix} \langle \boldsymbol{u}, x^i R_n \rangle \;=\; \begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n-1} \\ u_0v_{i+1} + u_1v_i & \dots & \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k+i} \end{vmatrix}.$$

Este último determinante, tomando em consideração (1.1), pode ser reescrito na seguinte forma

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \\ -\sum_{k=0}^{i-1} u_{i+1-k}v_k & -\sum_{k=0}^{i-1} u_{i+2-k}v_k & \dots & -\sum_{k=0}^{i-1} u_{i+n-k}v_k \end{vmatrix}$$
$$= -\sum_{k=0}^{i-1} v_k \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n-1} \\ u_{i+1-k} & u_{i+2-k} & \dots & u_{i+n-k} \end{vmatrix}.$$

Que é zero para $i = 1, 2, \dots, n-1$. Mais,

$$\langle \boldsymbol{u}, x^n R_n \rangle = -\frac{\begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n+1} & \dots & u_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_n \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n-2} \end{vmatrix}}.$$

Temos assim que $\{R_n\}$ definido por (2.1) é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$. ■

Podemos então escrever,

COROLÁRIO VII.1. *Seja* $\mathbf{u}$ *uma funcional linear regular. Então a funcional linear inversa,* $\boldsymbol{v}$*, é regular quando e só quando* $-x^2\mathbf{u}$ *for uma funcional linear regular.*
Além disso, se $\mathbf{u}$ *for definida positiva* $\mathbf{v}$ *será definida negativa.*

Vamos ver agora dois resultados que nos permitirão estudar convenientemente esta sucessão de polinómios ortogonais mónicos. O primeiro é devido a Brezinski [**28**] e o segundo a Maroni [**103**].

TEOREMA 2.2. *Sejam* $\boldsymbol{u}$ *uma funcional linear regular e* $\boldsymbol{v}$ *a funcional linear inversa de* $\boldsymbol{u}$*. Denotemos por* $\{R_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a* $\boldsymbol{v}$*. Então a sucessão de polinómios ortogonais mónicos* *associada $\{R_n^{(1)}\}$ admite a seguinte representação*

$$
\begin{aligned}
R_n^{(1)}(x) &= \frac{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2n} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_2 & \dots & u_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_n & \dots & u_{2n-1} \end{vmatrix}}, \quad n \geq 2 \\
R_1^{(1)}(x) &= x - \beta_0 \\
R_0^{(1)}(x) &= 1.
\end{aligned}
$$

Assim, se denotarmos por $\boldsymbol{v}^{\mathbf{(1)}}$ a funcional linear associada a $\{R_n^{(1)}\}$ temos que $\boldsymbol{v}^{\mathbf{(1)}} = x^2\boldsymbol{u}$.

DEMONSTRAÇÃO. Para a demonstração deste resultado, basta notar que

$$R_n^{(1)}(x) = \left\langle \boldsymbol{v}, \frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(t)}{x-t} \right\rangle$$

e que

$$\frac{R_{n+1}(x) - R_{n+1}(t)}{x-t} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & \dots & u_{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n+1} & u_{n+2} & \dots & u_{2n} \\ u_0 & u_0(x+t) & \dots & u_0 \sum_{k=0}^{n} x^k t^{n-k} + \dots + u_n \end{vmatrix}$$

Agora temos somente que calcular a acção de $\boldsymbol{v}$ sobre este último polinómio. ∎

TEOREMA 2.3. *Sejam $\boldsymbol{u}$ uma funcional linear regular e $\boldsymbol{v}$ a funcional linear inversa de $\boldsymbol{u}$. Então, $\boldsymbol{u}^{\mathbf{(1)}} = -u_0 x^2 \boldsymbol{v}$.*

3. Método para a Inversão de Funcionais

Do Teorema 2.3 se vê que a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{R_n\}$, associada à funcional linear $\boldsymbol{v}$, inversa de $\boldsymbol{u}$ é um caso particular das sucessões de polinómios ortogonais mónicos estudadas no Capítulo VI. De facto, tendo em atenção a Definição I.2.1 e o Corolário VI.1 do Teorema VI.2.1 obtemos[1]:

[1]Por uma questão de clareza para o que se segue reproduzimos o enunciado.

TEOREMA 3.1. *Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$ e $\{R_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{v}$ inversa de $\boldsymbol{u}$, i.e. existem pares de sucessões $(\beta_n^{ini}), (\gamma_n^{ini})$ e $(\beta_n), (\gamma_n)$ com $\gamma_{n+1} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\begin{aligned} &xP_n = P_{n+1} + \beta_n^{ini} P_n + \gamma_n^{ini} P_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ &P_0 = 1\,, \quad P_1 = x - \beta_0^{ini} \end{aligned} \tag{3.1}$$

e

$$\begin{aligned} &xR_n = R_{n+1} + \beta_n R_n + \gamma_n R_{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ &R_0 = 1\,, \quad R_1 = x - \beta_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Então

$$-u_0 \boldsymbol{v} = x^{-2} \boldsymbol{u^{(1)}} + M_1 \delta_0 + M_2 \delta_0'$$

$$\begin{aligned} &R_{n+2}(x) = P_{n+2}^{(1)}(x) + a_{n+2} P_{n+1}^{(1)}(x) + b_{n+2} P_n^{(1)}(x) \\ &R_1(x) = P_1^{(1)}(x) + a_1 P_0^{(1)}(x) \\ &R_0(x) = 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde (a_n) e (b_n) vêm dados por

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix} = -d_n^{-1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(x_1; -\frac{1}{v_1 - x_1 v_0}) \\ (v_1 - x_1 v_0) P'_{n+2}(x_1; -\frac{1}{v_1 - x_1 v_0}) + v_0 P_{n+2}(x_1) \end{bmatrix}$$

com

$$d_n = \begin{bmatrix} P_{n+1}^{(1)}(0) & P_n^{(1)}(0) \\ v_1 \left(P_{n+1}^{(1)}\right)'(0) + v_0 P_{n+1}^{(1)}(0) & v_1 \left(P_n^{(1)}\right)'(0) + v_0 P_n^{(1)}(0) \end{bmatrix}$$

e $a_1 = \beta_0 - \frac{v_1}{v_0}$. Além disso, os coeficientes (β_n) e (γ_n) podem ser calculados em termos dos (β_n^{ini}) e (γ_n^{ini}) bastando para tal aplicar (VI.2.11) e (VI.2.12).

O problema que nos surge aqui prende-se com o facto de muitas vezes se não conhecer uma expressão para $P_n^{(1)}(0)$. Vejamos como proceder nestes casos. Do Teorema 2.2 vemos que $\{R_n^{(1)}\}$ está associada à funcional linear $\boldsymbol{v^{(1)}} = x^2 \boldsymbol{u}$. Então de [**19**, T. III.1.4] ou [**102**] obtemos o seguinte resultado:

TEOREMA 3.2. *Sejam $\{P_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$ e $\{R_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{v}$ inversa de $\boldsymbol{u}$. Então*

$$\beta_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+2}}{a_{n+1,n+1}} \gamma_{n+2}^{ini} + \frac{P_{n+2}(0) P_{n+1}(0)}{\det D_{n+1}}\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.4}$$

$$\gamma_{n+2} = \frac{a_{n+2,n+2}}{a_{n+1,n+1}} \gamma_{n+2}^{ini}\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

com

$$\begin{bmatrix} a_{n,n+1} \\ a_{n,n} \end{bmatrix} = -D_{n+1} \begin{bmatrix} P_{n+2}(0) \\ P'_{n+2}(0) \end{bmatrix} \ \ e\ D_{n+1} = \begin{bmatrix} P_{n+1}(0) & P_n(0) \\ P'_{n+1}(0) & P'_n(0) \end{bmatrix}$$

Além disso,

$$\beta_0 = -\beta_0^{ini} \quad e \quad \gamma_1 = -\gamma_1^{ini} - (\beta_0^{ini})^2 \,. \tag{3.6}$$

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração de (3.4) e (3.5) é uma consequência directa de [**19**, T. III.1.4]. Provemos que se tem (3.6).

Como $\{R_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\boldsymbol{v}$ temos

$$\langle \boldsymbol{v}, R_1 \rangle = 0 \Longrightarrow \beta_0 = \frac{v_1}{v_0} \tag{3.7}$$

$$\langle \boldsymbol{v}, R_2 \rangle = 0 \Longrightarrow v_2 - (\beta_0 + \beta_1)v_1 + (\beta_0\beta_1 - \gamma_1)v_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \gamma_1 = \frac{v_2}{v_0} - \beta_0^2 \,. \tag{3.8}$$

Da mesma forma se conclui que

$$\langle \boldsymbol{u}, P_1 \rangle = 0 \Longrightarrow \beta_0^{ini} = \frac{u_1}{u_0} \tag{3.9}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, P_2 \rangle = 0 \Longrightarrow \gamma_1^{ini} = \frac{u_2}{u_0} - (\beta_0^{ini})^2 \,. \tag{3.10}$$

Recordemos que da definição de funcional linear inversa se tem

$$\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ 0 & u_0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Então da segunda equação e de (3.7) e (3.9) obtemos

$$\beta_0 = \frac{v_1}{v_0} = -\frac{u_1}{u_0} = -\beta_0^{ini}$$

e da primeira equação

$$\frac{v_2}{v_0} + \frac{u_1}{u_0}\frac{v_1}{v_0} + \frac{u_2}{u_0} = 0.$$

Agora substituindo $\frac{u_2}{u_0}$ obtido em (3.10) nesta equação vem

$$\frac{v_2}{v_0} = \gamma_1^{ini} \,.$$

Agora de (3.8) se tem o pretendido. ■

4. Exemplo

Antes de mais enunciemos o seguinte resultado:

TEOREMA 4.1. *Sejam $\{P_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{u}$ e $\{R_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à funcional linear $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{\mathbf{-1}}$. Se $\{P_n\}$ for semi clássica então $\{R_n^{(1)}\}$ é semi clássica enquanto que $\{R_n\}$ é de Laguerre-Hahn.*

Este resultado diz-nos que a inversão duma funcional não é estável na classe semi clássica. Além disso, pode ver-se que se invertem os papeis entre uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos e a sua associada.

Vejamos o que acontece no caso em que $\{P_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos clássica (ver Tabelas 1 e 3).

4.1. Caso Hermite. Neste caso os polinómios associados de primeira ordem de $\{R_n\}$, são ortogonais relativamente à funcional linear

$$\langle \boldsymbol{v}^{\mathbf{(1)}}, x^n \rangle = \int_{\mathbb{R}} x^n x^2 e^{-x^2} dx\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\{R_n^{(1)}\}$ coincide com a sucessão de polinómios ortogonais mónicos de Hermite generalizada de ordem $\mu = 1$, no sentido de Chihara [**35**, p.157]; e, portanto, verificam a seguinte relação de recorrência a três termos

$$xR_n^{(1)}(x) = R_{n+1}^{(1)}(x) + \frac{n+\theta_n}{2} R_{n-1}^{(1)}(x)$$

onde $\theta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2k \\ 2 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$. Então os coeficientes da relação de recorrência a três termos que $\{R_n\}$ verifica

$$\begin{aligned} &xR_n(x) = R_{n+1}(x) + \beta_n R_n(x) + \gamma_n R_{n-1}(x)\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \\ &R_0(x) = 1\,, \quad R_1(x) = x - \beta_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

vêm dados por $\begin{cases} \beta_{n+1} = 0 \\ \gamma_{n+2} = \frac{n+1+\theta_{n+1}}{2} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$. Para calcular β_0, γ_1 basta ver que $v_{2n+1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$ e que $\frac{v_2}{v_0} = -\frac{u_2}{u_0} = -\frac{1}{2}$. Assim, $\beta_0 = 0$ e $\gamma_1 = -\frac{1}{2}$.

4.2. Caso Laguerre. Neste caso os polinómios associados de primeira ordem de $\{R_n\}$, são ortogonais relativamente à funcional linear

$$\langle \boldsymbol{v}^{\mathbf{(1)}}, x^n \rangle = \int_0^\infty x^n x^{\alpha+2} e^{-x} dx\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mas estes polinómios ortogonais não são mais do que os polinómios associados a $x^{\alpha+2}e^{-x}$, i.e. são polinómios de Laguerre de parâmetros $\alpha+2$; e, portanto, verificam a seguinte relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} &xR_n^{(1)}(x) \\ &\qquad = R_{n+1}^{(1)}(x) + (2n+\alpha+3)R_n^{(1)}(x) + n(n+\alpha+3)R_{n-1}^{(1)}(x)\,, \quad n\in\mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Então os coeficientes da relação de recorrência a três termos (4.1) que $\{R_n\}$ verifica vêm dados por $\begin{cases}\beta_{n+1} = 2n+\alpha+3 \\ \gamma_{n+2} = (n+1)(n+\alpha+4)\end{cases}$, $n\in\mathbb{N}$. De (3.6) podemos calcular β_0, γ_1. De facto,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -(\alpha+1) \\ \gamma_1 &= -(\alpha+1) - (\alpha+1)^2 = -(\alpha+1)(\alpha+2)\,. \end{aligned}$$

4.3. Caso Jacobi. Os polinómios associados de primeira ordem de $\{R_n\}$, são ortogonais relativamente à funcional linear

$$\langle \boldsymbol{v}^{(\mathbf{1})}, x^n\rangle = \int_0^1 x^n x^{\beta+2}(1-x)^\alpha dx\,, \quad n\in\mathbb{N}$$

que coincidem com os polinómios de Jacobi de parâmetros $\beta+2, \alpha$; logo, verificam a seguinte relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} xR_n^{(1)}(x) &= R_{n+1}^{(1)}(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{(\beta+2)^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+4)}+1\right)R_n^{(1)}(x) \\ &+ \frac{n(n+\alpha)(n+\beta+2)(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)}R_{n-1}^{(1)}(x)\,, \quad n\in\mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Então os coeficientes da relação de recorrência a três termos (4.1) que $\{R_n\}$ verifica vêm dados por

$$\begin{cases} \beta_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{(\beta+2)^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+4)}+1\right) \\ \gamma_{n+2} = \frac{n(n+\alpha)(n+\beta+2)(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)^2(2n+\alpha+\beta+3)} \end{cases}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

De (3.6) podemos calcular β_0, γ_1. De facto,

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2} \\ \gamma_1 &= -\frac{\beta+1}{\alpha+\beta+2}(\alpha+1+(\beta+1)(\alpha+\beta+3))\,. \end{aligned}$$

4.4. Caso Bessel. Os polinómios associados de primeira ordem de $\{R_n\}$, são ortogonais relativamente à funcional linear

$$\langle \boldsymbol{v^{(1)}}, x^n \rangle = \int_{\mathbb{T}} x^n x^{\alpha+2} e^{-2/x} dx\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

que são os polinómios ortogonais de Bessel de parâmetros $\alpha+2$; e, portanto, verificam a seguinte relação de recorrência a três termos

$$\begin{aligned} xR_n^{(1)}(x) = R_{n+1}^{(1)}(x) &- \frac{2(\alpha+2)}{(2n+\alpha+2)(2n+\alpha+4)} R_n^{(1)}(x) \\ &- \frac{4n(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)} R_{n-1}^{(1)}(x)\,, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Então os coeficientes da relação de recorrência a três termos (4.1) que $\{R_n\}$ verifica vêm dados por

$$\begin{cases} \beta_{n+1} = -\frac{2(\alpha+2)}{(2n+\alpha+2)(2n+\alpha+4)} \\ \gamma_{n+2} = -\frac{4n(n+\alpha+2)}{(2n+\alpha+1)(2n+\alpha+2)^2(2n+\alpha+3)} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

De (3.6) podemos calcular β_0, γ_1. De facto, $\beta_0 = -\frac{2}{\alpha+2}$ e $\gamma_1 = \frac{4}{(\alpha+2)(\alpha+3)}$.

5. Funcionais Lineares de Segundo Grau

Vamos apresentar mais uma aplicação da teoria desenvolvida no Capítulo VI. Vamos estender a Definição I.4.1 a funcional linear:

DEFINIÇÃO 5.1. Seja $\boldsymbol{u}$ uma funcional linear regular. Definimos *transformada algébrica de Stieltjes* de $\boldsymbol{u}$ como sendo

$$S(\boldsymbol{u})(z) = -\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{u_n}{z^{n+1}} \quad \text{onde} \quad u_n = \langle \boldsymbol{u}, x^n \rangle.$$

Em [**105**] Maroni apresentou um tipo de funcional linear que veremos possuirem propriedades muitos interessantes:

DEFINIÇÃO 5.2. A *funcional linear* $\boldsymbol{u}$ diz-se de *segundo grau* se existirem polinómios B, C, D tais que

$$B(z)S^2(\boldsymbol{u})(z) + C(z)S(\boldsymbol{u})(z) + D(z) = 0 \tag{5.1}$$

onde D depende de $\boldsymbol{u}, B, C$.

OBSERVAÇÃO . Da regularidade de $\boldsymbol{u}$ obtemos que $B \neq 0$, $C^2 - 4BD \neq 0$ e $D \neq 0$.

A classe mais vasta de *funcional linear* estudada até hoje é a chamada de *Laguerre-Hahn* que vem definida por

$$\phi(z)S'(\boldsymbol{u})(z) = B_1(z)S^2(\boldsymbol{u})(z) + C_1(z)S(\boldsymbol{u})(z) + D_1(z) \tag{5.2}$$

onde $\phi, B_1, C_1, D_1 \in \mathbb{P}$.

De (5.1), (5.2) se conclui que se uma funcional linear for ao mesmo tempo de Laguerre-Hahn e de segunda grau, então será semi clássica, pois a transformada de Stieltjes da funcional linear verificará uma equação diferencial linear de primeira ordem com coeficientes polinomiais.

Estamos em condições de enunciar:

TEOREMA 5.1. *Uma funcional linear* $\boldsymbol{u}$ *de segundo grau é semi clássica.*

DEMONSTRAÇÃO. De facto, derivando em (5.1) obtemos

$$S'(2BS + C) + B'S^2 + C'S + D' = 0\,. \tag{5.3}$$

Mas

$$BS^2 + CS + D = (2BS + C)(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}\frac{C}{B}) + D - \frac{1}{4}\frac{C^2}{B}\,.$$

Então de (5.3) toma a forma

$$(\frac{1}{4}\frac{C^2}{B} - D)S' + (\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}\frac{C}{B})(B'S^2 + C'S + D') = 0$$

e de (5.1) obtemos

$$(C^2 - 4BD)S' + (2BC' - B'C)S^2 + (CC' + 2D'B - 2B'D)S + D'C = 0\,.$$

Logo a funcional linear $\boldsymbol{u}$ é de Laguerre-Hahn. Do que vimos acima se conclui que queríamos demonstrar. ∎

Como consequência deste resultado Maroni provou em [**106**]:

TEOREMA 5.2. *Sejam* $\boldsymbol{u}$ *uma funcional linear regular de segundo grau e* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos que lhe está associada. Então existe* $\Psi \in \mathbb{P}$ *tal que*

$$\Psi(z)P_n^{(1)}(z) = \sum_{j=0}^{s+d} a_{n,n-s+j}P_{n-s+j}\,. \tag{5.4}$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto se $\boldsymbol{u}$ for de Laguerre-Hahn então existem polinómios T, U tais que

$$TP_n' - UP_n^{(1)} = \sum_{j=n-s_1}^{n+d_1} b_{n,j} P_j\,, \quad n \geq s_1 + 1 \tag{5.5}$$

e do carácter semi clássico resulta que existe $V \in \mathbb{P}$ tal que

$$VP_n' = \sum_{j=n-s_2}^{n+d_2} c_{n,j} P_j\,, \quad n \geq s_2 + 1\,. \tag{5.6}$$

Conjugando (5.5) e (5.6) obtemos (5.4). ∎

Sempre que $\boldsymbol{u} \in M(a,b)$ podemos determinar facilmente uma expressão para a medida complexa que lhe está associada. De notar que Maroni obteve somente para alguns casos particulares a medida associada (cf. [**106**]).

TEOREMA 5.3. *Sejam* $\boldsymbol{u}$ *uma funcional linear de segundo grau e* $\{P_n\}$ *a sucessão de polinómios ortogonais mónicos que lhe está associada. Então*

$$S(\boldsymbol{u})(z) = \frac{1}{\Psi(z)} \sum_{j=0}^{s+d} a_j \left(\frac{a}{x - b + \sqrt{(x-b)^2 - a^2}} \right)^{1+s-j} \tag{5.7}$$

onde

$$\lim_{n\to\infty} a_{n,n-s+j} = a_{-s+j}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, s+d.$$

DEMONSTRAÇÃO. Basta multiplicar ambos os membros de (5.4) por $\frac{1}{P_{n+1}}$ e aplicar os Teoremas de Markov e I.7.3. ∎

CAPÍTULO VIII

Problemas Inversos sobre a Circunferência

1. Introdução **177**

2. Condições Necessárias e Suficientes **178**

2.1 Condição necessária **178**

2.2 Condição suficiente **183**

3. Estabilidade na Classe de Szegő **190**

4. Estrutura de $\mathcal{M}_2$ **192**

1. Introdução

Vamos transpôr para a circunferência o trabalho realizado no Capítulo VI. Este trabalho foi realizado por Branquinho, Golinskii e Marcellán em [**22**]. Assim, estamos interessados no estudo de sucessões de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ geradas como combinações lineares de sucessões de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$. Analisemo-las do ponto de vista histórico:

(a) A primeira está relacionada com perturbações das medidas correspondentes. Um primeiro exemplo vem dado quando multiplicamos uma medida de Borel positiva $d\mu$ por uma função racional positiva. Uma primeira tentativa de estudo deste tipo foi feito independentemente por Godoy e Marcellán [**58**], García-Lázaro e Marcellán [**50**] e Ismail e Ruedemann [**74**] onde polinómios trigonométricos positivos foram considerados. Em particular, algumas fórmulas de Christoffel foram deduzidas para o caso real. Quando se consideram funções racionais gerais o problema fica muito mais complicado (ver [**59, 74**]).

Uma segunda tentativa pode ser a adição a uma medida de Borel positiva $d\mu$ um número finito de massas de Dirac. Alguns autores [**31, 57, 86**] consideraram propriedades assimptóticas para as correspondentes sucessões de polinómios ortogonais mónicos quando os pontos de massa estão localizados na fronteira de $\mathbb{T}$ ou no seu exterior.

(b) Em [**24**] Branquinho e Marcellán estudaram sucessões de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ cuja combinação linear de dois elementos consecutivos seja ainda uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. Este trabalho foi motivado pelo conceito de quase-ortogonalidade sobre a recta real (ver Peherstorfer [**123**]) e estende alguns resultados não publicados de Marcellán e Tasis (ver por exemplo [**98**]). Independentemente, García-Lázaro e Moral [**52, 95**] estudaram esta questão de uma maneira original.

(c) Finalmente, podemos gerar novas sucessões de polinómios ortogonais mónicos por perturbações finitas nos parâmetros de reflexão. Neste caso, uma análise cuidada e extensa foi feita por Peherstorfer [**121**]. Nesses trabalhos a componente principal assenta nas relações entre as medidas de Borel positivas e as funções de Caratheodory correspondentes.

Com este capítulo pretendemos contribuir para o estudo da segunda tentativa de geração de sucessões de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$. Em particular, apresentamos condições necessárias e suficientes por forma a que $\psi_n = \phi_n - \alpha_n\phi_{n-1}$ seja uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ quando $\{\phi_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$. Além disso, na secção 3 apresentamos alguns exemplos de sucessões $\{\phi_n\}$ satisfazendo este tipo de condições. Nessa secção mostraremos que as medidas correspondentes a estas sucessões de polinómios ortogonais mónicos estão na classe de Szegő e, consequentemente, a sua parte absolutamente contínua pode ser calculada explicitamente (cf. Teorema III.3.3). Na secção 4 descreveremos todas as soluções para estas medidas, que estarão essencialmente na classe de Bernstein-Szegő.

2. Condições Necessárias e Suficientes

2.1. Condição Necessária. Comecemos por definir que tipo de medidas pretendemos estudar.

DEFINIÇÃO 2.1. Sejam μ uma medida de Borel positiva sobre $[0, 2\pi[$ e $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ. Dizemos que μ pertence à *classe* $\mathcal{M}_2$ se existe uma sucessão de números complexos (α_n) com $\alpha_n \neq 0$ tal que $\{\psi_n\}$ definido por

$$\psi_n(z) = \phi_n(z) - \alpha_n\phi_{n-1}(z) \tag{2.1}$$

é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a ν.

Apresentemos um resultado auxiliar que pode ser visto em [**94**]:

LEMA VIII.1. *Seja $\{\phi_n\}$ uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos. Se*

$$A_n\phi_n(z) = B_n\phi_n^*(z)\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.2}$$

então $A_n = B_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em atenção (III.1.2) podemos reescrever (2.2) na seguinte forma

$$A_n\phi_n(z) = B_n\frac{K_n(z,0)}{K_n(0,0)}\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

logo

$$
\begin{aligned}
A_n = \frac{B_n}{K_n(0,0)} \frac{\overline{\phi_n(0)}}{h_n}, &\quad j = n \\
\frac{B_n}{K_n(0,0)} \frac{\overline{\phi_j(0)}}{h_j} = 0\,, &\quad j = 0, 1, \ldots, n-1
\end{aligned}
$$

e de $j = 0$ obtemos o resultado. ■

Branquinho e Marcellán provaram em [**24**] o seguinte teorema de caracterização.

TEOREMA 2.1. *Seja $\mu \in \mathcal{M}_2$; então, temos as seguintes expressões*

$$\alpha_2(1 - |a_1|^2) \;=\; \alpha_1 + (-\bar{a}_2 + \alpha_2 \bar{a}_1)\bar{\alpha}_1 \tag{2.3}$$

$$\bar{a}_{n+1} - \alpha_{n+1}\bar{a}_n \;=\; 0\,, \quad n \geq 2 \tag{2.4}$$

$$\alpha_{n+1}(1 - |a_n|^2) \;=\; \alpha_n\,, \quad n \geq 2 \tag{2.5}$$

onde $a_n = -\overline{\phi_n(0)}$, $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $\psi_n(z) = z^{n-2}\psi_2(z)$, $n \geq 2$.

DEMONSTRAÇÃO. Vimos já que $\{\psi_n\}$ é uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre $\mathbb{T}$ se e somente se satisfaz as seguintes relações de recorrência

$$\psi_{n+1}(z) = z\psi_n(z) + \psi_{n+1}(0)\psi_n^{\star}(z)\,, \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } |\psi_{n+1}(0)| < 1.$$

Assim, usando (2.1) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\phi_{n+1}(z) - \alpha_{n+1}\phi_n(z) \\
&\qquad = z\phi_n(z) - \alpha_n z\phi_{n-1}(z) + (-\bar{a}_{n+1} + \alpha_{n+1}\bar{a}_n)(\phi_n^{\star}(z) - \bar{\alpha}_n z\phi_{n-1}^{\star}(z))
\end{aligned}
$$

para $n \geq 1$. Aplicando (1.4) obtemos

$$
\begin{aligned}
&- \alpha_{n+1}(z\phi_{n-1}(z) - \bar{a}n\phi_{n-1}^{*}(z)) \\
&\qquad = -\alpha_n z\phi_{n-1}(z) + \bar{a}n + 1\bar{\alpha}_n z\phi_{n-1}^{*}(z) + \alpha_{n+1}\bar{a}_n(\phi_n^{*}(z) - \bar{\alpha}_n z\phi_{n-1}^{*}(z))
\end{aligned}
$$

e por (1.5) temos que

$$\left[\alpha_{n+1} - \alpha_n - \alpha_{n+1}|a_n|^2\right] z\phi_{n-1}(z) = -\left[\bar{a}_{n+1} - \alpha_{n+1}\bar{a}_n\right]\bar{\alpha}_n z\phi_{n-1}^{\star}(z) \tag{2.6}$$

para $n \geq 1$. Agora, de (2.6) e tendo em consideração o Lema VIII.1 temos

$$\begin{aligned} \alpha_2(1-|a_1|^2) &= -(\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1)\bar{\alpha}_1 + \alpha_1 \\ \bar{a}_n(-\bar{a}_{n+1} + \alpha_{n+1}\bar{a}_n) &= \bar{a}_n\psi_{n+1}(0) = 0\,, \quad n \geq 2 \\ \alpha_{n+1}(1-|a_n|^2) &= \alpha_n\,, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Assim, se $a_n \neq 0$ para $n \geq 2$ temos de (2.4) $\psi_{n+1}(0) = 0$ para $n \geq 2$ e se $a_n = 0$ para $n \geq 2$ obtemos de (2.1) $\psi_{n+1}(0) = 0$ para $n \geq 2$. Aplicando a relação de recorrência de $\{\psi_n\}$ vem que

$$\psi_{n+1}(z) = z\psi_n(z)\,, \quad n \geq 2;$$

e a representação para estes polinómios

$$\psi_n(z) = z^{n-2}\psi_2(z)\,, \quad n \geq 2$$

tem-se. Logo, para termos $\{\phi_n\}$ perfeitamente determinado necessitamos das condições iniciais a_1, a_2, a_3. ■

OBSERVAÇÃO .

- $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ implica $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
- De (2.5) podemos calcular α_n, $n \geq 3$ em termos de α_2. Como $|\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1| < 1$, de (2.3) podemos escrever $\alpha_1 = \frac{(1-|a_1|^2)(1+(\bar{a}_2-\alpha_2\bar{a}_1))\alpha_2}{1-|\bar{a}_2-\alpha_2\bar{a}_1|^2}$. Agora, se $a_2 \neq 0$, de (2.4) $\alpha_3 = \frac{\bar{a}_3}{\bar{a}_2}$ e de (2.5) $\alpha_2 = \frac{\bar{a}_3}{\bar{a}_2}(1-|a_2|^2)$, i.e. temos (α_n) determinado por (2.3)-(2.5).
- De (2.5), se $\alpha_2 = |\alpha_2|e^{i\theta}$, então $\alpha_{n+1} = |\alpha_{n+1}|e^{i\theta}$, $n \geq 1$.

Vamos ver de seguida, que tipo de coeficientes a_n e α_n podemos ter.

(a). Se $a_1 = 0$ temos de (2.3)

$$\alpha_2 = -\bar{a}_2\bar{\alpha}_1 + \alpha_1 \tag{2.7}$$

então, duas condições se podem dar:

(a.1). $\alpha_1 = \alpha_2$

Neste caso $\bar{a}_2\bar{\alpha}_1 = 0$ e consequentemente $a_2 = 0$. De (2.4) $a_n = 0$, para $n \geq 1$ e de (2.5) $\alpha_n = \alpha_1$, $n \geq 1$.

Isto implica que $\begin{cases} \phi_n(z) &= z^n \\ \alpha_n &= \alpha_1\,, \quad n \geq 1 \end{cases}$ i.e. $\{\psi_n\}$ toma a forma $\psi_n(z) = z^{n-1}(z+\alpha_1)$, $n \geq 1$ e é ortogonal relativamente à medida de Poisson $d\mu = \dfrac{d\theta}{|\exp(i\theta)+\alpha_1|^2}$, $|\alpha_1| \neq 1$. (a.2). $\alpha_1 \neq -\bar{a}_2$

Então, tomando a conjugada da equação (2.7)

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -\bar{a}_2\bar{\alpha}_1 + \alpha_1\\ \bar{\alpha}_2 &= \bar{a}_2\alpha_1 + \bar{\alpha}_1\end{aligned}$$

e $\alpha_1 = \frac{\alpha_2+\bar{\alpha}_2\bar{a}_2}{1-|a_2|^2}$.

Neste caso, resulta que

$$\bar{a}_{n+1} = \alpha_{n+1}\bar{a}_n = -\frac{K_1\bar{a}_2}{K_n}\bar{a}_n$$

e como $\prod_{i=1}^{n} K_i = \Delta_n$ temos,

$$\bar{a}_{n+1} = (-1)^{n+1}K_1\alpha_2)^n\frac{1}{\Delta_n}\,, \quad n \geq 2.$$

ote-se que $a_2 \neq 0$ pois caso contrário, $\alpha_1 = \alpha_2$ em contradição com a hipótese. Então $\psi_n(z) = z^{n-2}\psi_2(z)$ com $\psi_2(0) \neq 0$.

Se tomarmos $\bar{a}_2 = -q$ e $\alpha_2 = 1-q$ então $\alpha_1 = \frac{1-q}{1+q}$. Por indução

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1+(n-3)q}{1+(n-2)q}\,, \quad n \geq 2\\ \bar{a}_n &= (-1)^{n+1}\frac{q}{1+(n-2)q}\,, \quad n \geq 2 \text{ e } a_1 = 0.\end{aligned}$$

(b). Se $a_1 \neq 0$, dois casos se podem considerar:

(b.1). $a_2 = 0$

De (2.4) temos $a_n = 0$, $n \geq 2$. Então, $\phi_n(z) = z^{n-1}\phi_1(z)$, $n \geq 1$. Mais, $\alpha_n = \alpha_2$ e de (2.3) $\alpha_2(1-|a_1|^2) = -\alpha_2\bar{\alpha}_1\bar{a}_1 + \alpha_1$. Conjugando obtemos

$$\bar{\alpha}_2(1-|a_1|^2) = \bar{a}_2\alpha_1\bar{a}_1 + \bar{\alpha}_1$$

e portanto

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_2\frac{(1-|a_1|^2)(1-\alpha_2\bar{a}_1)}{1-|\alpha_2|^2|a_1|^2}$$

Observe-se que nestas condições

$$\begin{aligned}\psi_n(z) &= z^{n-1}\phi_1(z) + \alpha_n z^{n-2}\phi_1(z)\\ &= z^{n-2}\phi_1(z)(z+\alpha_2)\\ &= z^{n-2}(z-\bar{a}_1)(z+\alpha_2)\,, \quad n \geq 2\end{aligned}$$

Esta condição corresponde ao caso em que $\{\psi_n\}$ é a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida

$$d\mu = \frac{d\theta}{|\exp(i\theta) - \bar{a}_1|^2 |\exp(i\theta) + \alpha_2|^2}, \quad |\alpha_2| \neq 1 .$$

(b.2). $a_2 \neq 0$

Então $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Esta é a situação mais interessante.

Vamos determinar um algoritmo para calcular os parâmetros de reflexão. De facto, de (2.3) temos

$$\bar{a}_2 = -\frac{\alpha_2(1 - |a_1|^2) - \alpha_1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \bar{a}_1}{\bar{\alpha}_1}.$$

Usando sucessivamente (2.4) e (2.5) temos

$$\alpha_3 = \frac{\alpha_2}{1 - |a_2|^2} \quad \longrightarrow \quad \bar{a}_3 = -\alpha_3 \bar{a}_2$$

$$\cdots$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_2}{\prod_{k=1}^{n}(1 - |a_k|^2)} \quad \longrightarrow \quad \bar{a}_{n+1} = (-1)^{n+1} \prod_{k=2}^{n} \alpha_k \bar{a}_1 .$$

Podemos considerar a situação particular $\bar{a}_2 = -q$ e $\alpha_2 = 1 - q$. Como atrás, deduzimos

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1 + (n-3)q}{1 + (n-2)q} \\ \bar{a}_n &= (-1)^{n+1} \frac{q}{1 + (n-2)q} \end{aligned}$$

para $n \geq 2$; se tomarmos $\bar{a}_1 = \frac{q}{1-q}$ em (2.3) então $\alpha_1 = \frac{1-2q}{q-1}$. Logo

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{1 + (n-3)q}{1 + (n-2)q} \\ \bar{a}_n &= (-1)^{n+1} \frac{q}{1 + (n-2)q} \end{aligned}$$

para $n \geq 1$. ∎

A partir do conhecimento de (a_n) podemos chegar à medida μ como se pode ver do estudo realizado no Capítulo III no Exemplo 4.1. Aqui não vamos proceder dessa forma.

2.2. Condição Suficiente. Vamos ver que condições adicionais temos que impor por forma a termos que os polinómios definidos por (2.1) sejam ortogonais.

TEOREMA 2.2. *Sejam* $\{\phi_n\}$ *uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos sobre* $\mathbb{T}$ *e* $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *A sucessão de polinómios mónicos* $\{\psi_n\}$ *definida por* (2.1) *é ortogonal se e somente se, se tem* (2.3)-(2.5) *e* $\begin{cases} |\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1| < 1 \\ |\alpha_1 + \bar{a}_1| < 1 \end{cases}$.

DEMONSTRAÇÃO. De (II.1.5) temos

$$\phi^*_{n+1}(z) - \phi^*_0(z) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{k+1} z \phi_k(z) \,. \tag{2.8}$$

Vamos provar que as condições (2.3)-(2.5) implicam

$$\psi_{n+1}(z) = z\psi_n(z) + \psi_{n+1}(0)\psi^\star_n(z) \,.$$

Vamos proceder em três etapas. Primeiro, tomemos $n \geq 2$ e aplicando sucessivamente (2.1), (II.1.5) e (2.8) obtemos

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(z) - z\psi_n(z) &= \phi_{n+1}(z) - \alpha_{n+1}\phi_n(z) - z(\phi_n(z) - \alpha_n\phi_{n-1}(z)) \\ &= -\bar{a}_{n+1}\phi^*_n(z) - \alpha_{n+1}\phi_n(z) + z\alpha_n\phi_{n-1}(z) \\ &= -\bar{a}_{n+1}\left(1 - z\sum_{k=1}^{n} a_k\phi_{k-1}(z)\right) \\ &\qquad - \alpha_{n+1}\phi_n(z) + z\alpha_n\phi_{n-1}(z) \\ &= z\phi_{n-1}(z)(a_n\bar{a}_{n+1} + \alpha_n) - \bar{a}_{n+1}\phi^*_{n-1}(z) - \alpha_{n+1}\phi_n(z) \,. \end{aligned}$$

Por (2.4), (2.5)

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \alpha_{n+1} - \frac{\bar{a}_{n+1}}{\bar{a}_n}|a_n|^2 \\ \alpha_{n+1} &= \bar{a}_{n+1}a_n + \alpha_n \\ \alpha_n + a_n\bar{a}_{n+1} &= \alpha_n + \alpha_{n+1}|a_n|^2 = \alpha_{n+1} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(z) - z\psi_n(z) &= -\alpha_{n+1}(\phi_n(z) - z\phi_{n-1}(z)) - \bar{a}_{n+1}\phi^*_{n-1}(z) \\ &= (\alpha_{n+1}\bar{a}_n - \bar{a}_{n+1})\phi^*_{n-1}(z) = 0 \end{aligned}$$

e como $\psi_{n+1}(0) = 0$ para $n \geq 2$ temos

$$\psi_{n+1}(z) - z\psi_n(z) = \psi_{n+1}(0)\psi^*_n(z) \quad \text{para} \quad n \geq 2 \,.$$

Agora para $n = 1$

$$\begin{aligned} \psi_2(z) - z\psi_1(z) &= \phi_2(z) - \alpha_2\phi_1(z) - z(\phi_1(z) - \alpha_1\phi_0(z)) \\ &= -\bar{a}_2\phi_1^*(z) - \alpha_2\phi_1(z) + \alpha_1 z \\ &= z(\alpha_1 - \alpha_2 + a_1\bar{a}_2) - (\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1)\,. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \psi_2(0)\psi_1^*(z) &= -(\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1)z\left(\frac{1}{z} - (a_1 + \bar{\alpha}_1)\right) \\ &= (-\bar{a}_2 + \alpha_2\bar{a}_1)(1 - (a_1 + \bar{\alpha}_1)z) \\ &= -(\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1) + z(\bar{a}_2 a_1 - \alpha_2 + \alpha_1) + z(\alpha_2(1 - |a_1|^2) \\ &\qquad - \alpha_1 - (\alpha_2\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\bar{\alpha}_1) \end{aligned}$$

Pela equação (2.3) vem que

$$\psi_2(0)\psi_1^*(z) = -(\bar{a}_2 - \alpha_2\bar{a}_1)(1 - z(a_1 + \bar{\alpha}_1))$$

logo é equivalente a (II.1.4) com $n = 1$. A equação (II.1.4) para $n = 0$ é obviamente verdadeira. ■

O nosso objectivo no que se segue, vai ser o de determinar que tipo de medidas de Borel positivas vão estar em $\mathcal{M}_2$. Comecemos por provar que estas medidas de $\mathcal{M}_2$ são tais que α_n podem, sem perda de generalidade, ser tomados positivos para $n \geq 2$. Chamá-las-emos *medidas normalizadas.*

TEOREMA 2.3. *Se μ pertence a $\mathcal{M}_2$ então é uma rotação de alguma medida normalizada.*

DEMONSTRAÇÃO. Tomando $\alpha_n = |\alpha_n|e^{i\theta}$, para $n \geq 2$. Considerando $\tilde{\phi}_n(z) = e^{-in\theta}\phi_n(ze^{i\theta})$ e $\tilde{\psi}_n(z) = e^{-in\theta}\psi_n(ze^{i\theta})$ então de (2.1)

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{n+1}(z) &= e^{-i(n+1)\theta}(\phi_{n+1}(ze^{i\theta}) - |\alpha_{n+1}|e^{i\theta}\phi_n(ze^{i\theta})) \\ &= e^{-i(n+1)\theta}\phi_{n+1}(ze^{i\theta}) - |\alpha_{n+1}|e^{-in\theta}\phi_n(ze^{i\theta}) \\ &= \tilde{\phi}_{n+1}(z) - |\alpha_{n+1}|\tilde{\phi}_n(z)\,. \end{aligned}$$ ■

Apresentemos agora o seguinte resultado devido a Godoy e Marcellán [**58**, Cor. 2].

TEOREMA 2.4. *Seja $\{\phi_n(.;\mu)\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ e $d\mu_1 = |z-\beta|^2 d\mu$ com $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Então, a sucessão* *de polinómios ortogonais mónicos* $\{\phi_n(.;\mu_1)\}$ *associada a* μ_1 *vem dada por*

$$(z-\beta)\phi_n(z;\mu_1) = \phi_{n+1}(z;\mu) - \frac{\phi_{n+1}(\beta;\mu)}{K_n(\beta,\beta;\mu)} K_n(z,\beta;\mu) \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Este resultado vai-nos permitir demonstrar algo que intuímos do estudo atrás realizado:

- Certas modificações racionais das medidas tipo Bernstein-Szegő estão em $\mathcal{M}_2$.

Vejamos então três exemplos fundamentais de medidas que estão em $\mathcal{M}_2$.

EXEMPLO 2.1. Sejam $|z_j| < 1, \ j = 1,2$ dois números complexos arbitrários, $C > 0$ e

$$d\mu_0 = \frac{C\, d\theta}{|1-\overline{z_1}z|^2\,|1-\overline{z_2}z|^2}\,, \quad d\mu = |z-\alpha|^2\, d\mu_0, \quad z = e^{i\theta}, \tag{2.10}$$

onde $0 < |\alpha| < 1$ é um número complexo. Se denotarmos por $\{\psi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ_0, $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a μ e $a_n = \phi_n(0)$ então existe $(\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ tal que

$$\phi_n(z) - \alpha_n \phi_{n-1}(z) = \psi_n(z)\,. \tag{2.11}$$

De (2.9) sabemos que

$$(z-\alpha)\phi_n(z) = \psi_{n+1}(z) - \frac{\psi_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)} K_n(z,\alpha) \tag{2.12}$$

onde

$$K_n(z,y) = \frac{\psi_n^*(z)\overline{\psi_n^*(y)} - z\bar{y}\psi_n(z)\overline{\psi_n(y)}}{\|\psi_n\|^2(1-z\bar{y})}$$

ver por exemplo [**57**, p. 10, Th. 8.1]. Se considerarmos (2.12) com $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
(z-\alpha)\phi_n(z) &= \psi_{n+1}(z) - \frac{\psi_{n+1}(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}K_n(z,\alpha) \\
&= z\psi_n(z) - \frac{\alpha\psi_n(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}K_n(z,\alpha) \\
&= (z-\alpha)\psi_n(z) + \alpha\left(\psi_n(z) - \frac{\psi_n(\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}K_n(z,\alpha)\right) \\
&= (z-\alpha)\psi_n(z) + \frac{\alpha}{K_n(\alpha,\alpha)}\begin{vmatrix}\psi_n(z) & K_n(z,\alpha) \\ \psi_n(\alpha) & K_n(\alpha,\alpha)\end{vmatrix} \\
&= (z-\alpha)\psi_n(z) + \frac{\alpha}{K_n(\alpha,\alpha)}\begin{vmatrix}\psi_n(z) & K_{n-1}(z,\alpha) \\ \psi_n(\alpha) & K_{n-1}(\alpha,\alpha)\end{vmatrix} \\
&= (z-\alpha)\psi_n(z) + \frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}\alpha(z-\alpha)\phi_{n-1}(z)
\end{aligned}$$

então

$$\phi_n(z) = \psi_n(z) + \frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}\alpha\phi_{n-1}(z)\,, \quad n \geq 2$$

i.e.

$$\begin{aligned}
\psi_n(z) &= \phi_n(z) - \frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}\alpha\phi_{n-1}(z)\,, \quad n \geq 2 \\
\psi_1(z) &= \phi_1(z) - \alpha_1
\end{aligned}$$

logo tem-se (2.11) com $\alpha_n = \frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}\alpha$.

EXEMPLO 2.2. Se $d\mu = \frac{d\theta}{|1-\bar{z}_1 z|^2}$ com $|z_1| < 1$ então $\phi_n(z) = z^{n-1}(z-z_1)$ para $n \geq 1$.

De (2.5) $\alpha_n = \alpha_2$, $n \geq 2$ e

$$\psi_n(z) = z^{n-2}\psi_2(z)$$

onde

$$\begin{aligned}
z^{n-2}\psi_2(z) &= \phi_n(z) - \alpha_2\phi_{n-1}(z)\,, \quad n \geq 2 \\
&= (z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2})(z-z_1)\,, \quad n \geq 2
\end{aligned}$$

i.e. $\psi_2(z) = (z-\alpha_2)(z-z_1)$.

Note-se que, se $z_1 = 0$, então $\phi_n(z) = z^n$ e $\psi_n(z) = z^{n-1}(z-\alpha_2)$, $n \geq 2$ e $\psi_1(z) = z - \alpha_1$, i.e. $\alpha_1 = \alpha_2$.

EXEMPLO 2.3. Sejam $|z_i| < 1$, $i = 1, 2$ dois números complexos arbitrários,

$$d\mu = \frac{d\theta}{|1 - \bar{z}_1 z|^2 |1 - \bar{z}_2 z|^2} \quad e \quad d\mu_1 = |z-1|^2 d\mu.$$

Então

$$\phi_n(z, d\mu_1) - \frac{a_n}{a_{n-1}} \phi_{n-1}(z, d\mu_1) = z^{n-2}(z - z_1)(z - z_2)\,, \quad n \geq 2 \qquad (2.13)$$

onde $a_n = \phi_n(0, d\mu_1)$.

De facto, se denotarmos por $\phi_n(z) = \phi_n(z, \mu)$. Por [**58**, Prop. 3, (a)] obtemos

$$(z-1)^2 \phi_n(z, \mu_1) = \frac{\Delta_n(z)}{\Delta_{1,n}(1)}$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_{1,n}(z) &= \begin{vmatrix} \phi_{n+1}(z) & \phi^*_{n+1}(z) \\ \phi'_{n+1}(z) & \left(\phi^*_{n+1}\right)'(z) \end{vmatrix} \\ \Delta_n(z) &= \begin{vmatrix} (z-1)\phi_{n+1}(z) & \phi_{n+1}(z) & \phi^*_{n+1}(z) \\ 0 & \phi_{n+1}(1) & \phi^*_{n+1}(1) \\ \phi_{n+1}(1) & \phi'_{n+1}(1) & \left(\phi^*_{n+1}\right)'(1) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Mais, $\Delta_n(z) = (z-1)\phi_{n+1}(z)\Delta_{1,n}(1) + \phi_{n+1}(1)\Delta_{2,n}(z)$ onde

$$\Delta_{2,n}(z) = \begin{vmatrix} \phi_{n+1}(z) & \phi^*_{n+1}(z) \\ \phi_{n+1}(1) & \phi^*_{n+1}(1) \end{vmatrix} = \phi^*_2(1)\phi_{n+1}(z) - \phi^*_{n+1}(z)\phi_2(1)$$

Mas ϕ_n pertence à classe de Bernstein-Szegő, i.e.

$$\begin{aligned} \phi_n(z) &= z^{n-2}\phi_2(z)\,, \quad n \geq 2 \\ \phi_2(z) &= (z - z_1)(z - z_2) \\ \phi^*_n(z) &= \phi^*_2(z)\,, \quad n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \Delta_{1,n}(1) &= \left((\phi^*_2)'(1)\phi_2(1) - \phi^*_2(1)\phi'_2(1) \right) - (n-1)|\phi_2(1)|^2\,, \quad n \geq 1 \\ \Delta_{2,n}(1) &= \phi_2(1)\phi^*_2(1) - \phi^*_2(1)\phi_2(1) = 0\,, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

e portanto

$$(z-1)^2 \phi_n(z, \mu_1) = (z-1)z^{n-1}\phi_2(z) + \phi_2(1)\frac{\Delta_{2,n}(z)}{\Delta_{1,n}(1)}\,.$$

Donde se conclui

$$\begin{aligned}
(z-1)\phi_n(z,\mu_1) &= z^{n-1}\phi_2(z) + \frac{\phi_2(1)}{\Delta_{1,n}(1)}\frac{\phi_2^*(1)\phi_{n+1}(z) - \phi_2(1)\phi_{n+1}^*(z)}{z-1} \\
&= z^{n-1}\phi_2(z) + \frac{\phi_2(1)}{\Delta_{1,n}(1)}\frac{\phi_2^*(1)z^{n-1}\phi_2(z) - \phi_2(1)\phi_2^*(z)}{z-1} \\
&= z^{n-1}\phi_2(z) + \frac{\phi_2(1)\phi_2^*(1)\phi_2(z)}{\Delta_{1,n}(1)}\frac{z^{n-1}-1}{z-1} \\
&\qquad + \frac{\phi_2(1)}{\Delta_{1,n}(1)}\frac{\phi_2^*(1)\phi_2(z) - \phi_2(1)\phi_2^*(z)}{z-1} \\
&= z^{n-1}\phi_2(z) + \frac{\phi_2(1)\phi_2^*(1)\phi_2(z)}{\Delta_{1,n}(1)}\sum_{j=0}^{n-2} z^j \\
&\quad + \frac{\phi_2(1)}{\Delta_{1,n}(1)}\left[\phi_2^*(1)\frac{\phi_2(z)-\phi_2(1)}{z-1} - \phi_2(1)\frac{\phi_2^*(z)-\phi_2^*(1)}{z-1}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z-1)\phi_n(z,\mu_1) = \phi_2(z)&\left[z^{n-1} + \frac{|\phi_2(1)|^2}{\Delta_{1,n}(1)}\sum_{j=0}^{n-2} z^j\right] \\
&+ \frac{\phi_2(1)}{\Delta_{1,n}(1)}\Big[\overline{\phi_2(1)}(\phi_1(z) + 1 + \phi_2(0)\overline{\phi_1(0)}) \\
&\qquad\qquad - \phi_2(1)\left(\overline{\phi_1(0)} + \overline{\phi_2(0)}(\phi_1(z)+1)\right)\Big]
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
(z-1)\phi_n(z,\mu_1)\Delta_{1,n}(1) &= \phi_2(z)\left[\Delta_{1,n}(1)z^{n-1} + Q_{n-2}(z)\right] + \phi_2(1)R_1(z) \\
(z-1)\phi_{n+1}(z,\mu_1)\Delta_{1,n+1}(1) &= \phi_2(z)\left[\Delta_{1,n+1}(1)z^{n} + Q_{n-1}(z)\right] + \phi_2(1)R_1(z)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
Q_{n-2}(z) &= |\phi_2(1)|^2\sum_{j=0}^{n-2} z^j \\
R_1(z) &= \overline{\phi_2(1)}(\phi_1(z) + 1 + \phi_2(0)\overline{\phi_1(0)}) \\
&\qquad - \phi_2(1)\left(\overline{\phi_1(0)} + \overline{\phi_2(0)}(\phi_1(z)+1)\right)
\end{aligned}$$

Subtraindo as duas expressões

$$(z-1)\left[\phi_{n+1}(z,\mu_1)\Delta_{1,n+1}(1) - \phi_n(z,\mu_1)\Delta_{1,n}(1)\right]$$

$$\begin{aligned}
&= \phi_2(z)\left[\Delta_{1,n+1}(1)z^n - \Delta_{1,n}(1)z^{n-1} + |\phi_2(1)|^2 z^{n-1}\right] \\
&= \phi_2(z)\left[\Delta_{1,n+1}(1)z^n - \Delta_{1,n+1}(1)z^{n-1}\right] \\
&= \Delta_{1,n+1}(1)\phi_2(z)z^{n-1}(z-1)
\end{aligned}$$

i.e.

$$\phi_{n+1}(z,\mu_1)\Delta_{1,n+1}(1) - \phi_n(z,\mu_1)\Delta_{1,n}(1) = \Delta_{1,n+1}(1)\phi_{n+1}(z)$$

que coincide com (2.13).

Os resultados contidos nos exemplos anteriores dizem-nos:

TEOREMA 2.5. *Toda a medida* μ *da forma*

$$d\mu = C\frac{|1-\gamma z|^2\, d\theta}{|1-\overline{z_1}z|^2|1-\overline{z_2}z|^2}\,, \quad z = e^{i\theta}$$

com $0 < |\gamma| \leq 1$, $|z_j| < 1$, $j = 1, 2$ *e* $C > 0$ *pertence a* $\mathcal{M}_2$.

Vejamos agora um exemplo de sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a uma medida que não está na classe $\mathcal{M}_2$.

EXEMPLO 2.4. Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $d\mu = \frac{1}{2\pi}d\theta + M\delta(e^{i\theta}-1)$ então

$$\phi_n(z,d\mu) = z^n - \frac{M}{nM+1}\frac{z^n-1}{z-1}$$

e, consequentemente, $a_n = -\frac{M}{1+nM}$ para $n \in \mathbb{N}$. Além disso, a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{\psi_n\}$ associada a $\{\phi_n\}$ por (2.1) com coeficientes (α_n) definidos por (2.3)-(2.5) vêm dadas por

$$\psi_{n+1}(z) = z^n(z-1)\,, \quad n \geq 1$$

donde se conclui que não podem ser ortogonais sobre $\mathbb{T}$ pois $|\psi_1(0)| = 1$ ou, equivalentemente, um dos zeros de ψ_2 está na fronteira de $\mathbb{T}$.

Demonstremos este resultado. Comecemos por escrever ϕ_n como expansão em potências de z

$$\phi_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_{n,k}z^k$$

onde

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_n(z)\bar{z}^k d\theta = -M\phi_n(1).$$

Portanto, $\phi_n(z) = z^n - M\phi_n(1)\sum_{k=0}^{n-1}z^k$, onde $\phi_n(1) = \frac{1}{1+nM}$. Donde se obtem a expressão desejada para ϕ_n.

A partir de (2.4) $\alpha_{n+3} = -\frac{1+(n+2)M}{1+(n+3)M}$, $n \in \mathbb{N}$ e de (2.3) obtemos

$$-\frac{1+M}{1+2M}\left(1 - \frac{M^2}{(1+M)^2}\right) = \left(\frac{M}{1+2M} + \frac{M}{1+M}\frac{1+M}{1+2M}\right)\bar{\alpha}_1 + \alpha_1$$

i.e. $\alpha_1 = -\frac{1}{1+M}$; então, $\alpha_{n+1} = -\frac{1+nM}{1+(n+1)M}$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}(z) &= z^{n+1} - \frac{M}{1+(n+1)M}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &\quad \frac{1+nM}{1+(n+1)M}\left(z^n - \frac{M}{1+nM}\frac{1-z^n}{1-z}\right) \\ &= z^{n+1} - \frac{1+nM}{1+(n+1)M}z^n + \frac{M}{1+(n+1)M}\frac{z^{n+1}-z^n}{1-z} \\ &= z^{n+1} - \frac{z^n}{1+(n+1)M}(1+nM+M) \\ &= z^n(z-1). \end{aligned}$$

No decorrer deste Capítulo provaremos que as medidas que estão na classe $\mathcal{M}_2$ são absolutamente contínua.

3. Estabilidade na Classe de Szegő

É bem sabido que uma sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{\phi_n\}$ associada à medida positiva de Borel μ sobre $\mathbb{T}$ pertence à classe de Szegő $\mathcal{S}$, se e somente se $\ln \mu'$ é integrável (cf. Definição III.2.1). Em termos dos parâmetros de reflexão esta condição vem reformulada pela alínea (a) do Teorema III.2.5. Assim, do Teorema 2.1 vemos que a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{\psi_n\}$ definida por (2.1) com $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$ pertence a esta classe. O que é que acontece à sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{\phi_n\}$ neste caso? Vamos ver que esta sucessão de polinómios ortogonais mónicos também pertence à classe Szegő.

TEOREMA 3.1. *Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva μ. Se $\mu \in \mathcal{M}_2$ então $\{\phi_n\}$ pertence a $\mathcal{S}$.*

DEMONSTRAÇÃO. Da equação (2.4) tiramos que se existe $n_0 \geq 2$ tal que $a_{n_0} = 0$ então $a_{n+n_0} = 0$, $n \in \mathbb{N}$; e portanto $\sum_{n\in\mathbb{Z}^+} |a_n|^2 = \sum_{n=1}^{n_0} |a_n|^2$, i.e. $\{\phi_n\}$ pertence a $\mathcal{S}$.

Assumamos agora que $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Então de (2.4)

$$|a_{n+1}|^2 - \alpha_{n+1}^2|a_n|^2 = 0,\ n \geq 2\,. \tag{3.1}$$

Mas, neste caso de (2.5)

$$1-|a_n|^2=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\,,\quad n\geq 2 \tag{3.2}$$

logo, como $|a_n|<1$ temos

$$\alpha_n<\alpha_{n+1}\,,\quad n\geq 2 \tag{3.3}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}=\prod_{k=2}^{n}(1-|a_k|^2)\,,\quad n\geq 2\,. \tag{3.4}$$

Sabemos

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}|a_n|^2<\infty \text{ se e somente se } 0<\prod_{n\in\mathbb{Z}^+}(1-|a_n|^2)<\infty.$$

Assim de (3.4) temos esta convergência se e somente se $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ com $\alpha\neq 0$. Agora de (3.3) vemos que (α_n) é uma sucessão monótona crescente, pelo que temos somente de provar que tem um majorante.

Se substituirmos na equação (3.1) a expressão de $|a_n|^2$ obtida em (3.2) obtemos

$$\begin{aligned}1-\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}}-\alpha_{n+1}^2\left(1-\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)&=0\,,\quad n\geq 2\\ \frac{\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+2}}&=\alpha_{n+1}^2\frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\,,\quad n\geq 2\\ \frac{1}{\alpha_{n+1}}-\frac{1}{\alpha_{n+2}}&=\alpha_{n+1}-\alpha_n\,,\quad \geq 2\\ \alpha_{n+1}&=\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_2-\frac{1}{\alpha_{n+2}}\,,\quad n\geq 2\,.\end{aligned}$$

Logo $\alpha_{n+1}<\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_2$, $n\geq 2$, i.e. existe $\alpha\in\mathbb{R}^+$ tal que $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\alpha_n=\alpha$. Mais,

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_2$$

i.e. $\alpha=\frac{(\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_2)\pm\sqrt{(\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_2)^2-4}}{2}$. Portanto, $\frac{1}{\alpha_3}+\alpha_2\geq 2$. E daqui se segue o resultado desejado. ■

Estamos em condições de calcular a parte absolutamente contínua da medida positiva μ associada à sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{\phi_n\}$.

TEOREMA 3.2. *A parte absolutamente contínua da medida μ associada a $\{\phi_n\}$ é a.e.*

$$w(\theta)=C\frac{|1-\alpha z|^2}{|\psi_2^*(z)|^2}\,,\quad z=e^{i\theta} \tag{3.5}$$

onde $C>0$, $\psi_n=\phi_n-\alpha_n\phi_{n-1}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO. Da representação $\psi_n(z) = z^{n-2}\psi_2(z)$ usando o operador $*$ sobre (2.1) obtemos

$$\psi_2^*(z) = \phi_n^*(z) - \bar{\alpha}_n z \phi_{n-1}^*(z)\,. \tag{3.6}$$

Mas $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n^*(z) = D^{-1}(z;\mu)$, onde $D(z;\mu)$ é a função de Szegő (ver [**47**, p. 209]), pelo que de (3.6) tem-se

$$D^{-1}(z;\mu) = \frac{\psi_2^*(z)}{1-\alpha z}$$

e daqui se obtem (3.5). ■

Como consequência podemos enunciar:

COROLÁRIO VIII.1. *Se μ está em $\mathcal{M}_2$ então existe $\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ e é menor do que ou igual a* 1.

DEMONSTRAÇÃO. Se $\alpha > 1$, i.e. existe $\delta > 0$ tal que $\alpha = 1+\delta$, então de (2.4) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $|a_n| > (1+\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}|$. Logo (a_n) é uma sucessão não limitada, o que implica que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$ não converge. ■

4. Estrutura de $\mathcal{M}_2$

Para obter a representação para as medidas da classe $\mathcal{M}_2$ vamos necessitar de dois teoremas que relacionam o comportamento dos parâmetros de reflexão com as medidas correspondentes. O primeiro é devido a Geronimus [**57**, p. 52, Th. 26.1] (cf. Teorema III.4.1) e o segundo a Nevai [**116**].

TEOREMA 4.1. *Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada à medida de Borel positiva μ. Se (a_n) é tal que*

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k \sum\limits_{m=k}^{\infty} |a_{m+1} - a_m|| < \infty \end{cases} \tag{4.1}$$

Então $d\mu(\theta) = \mu' d\theta + \lambda\delta(\theta)$.

Provemos primeiro alguns resultados auxiliares acerca das sucessões de polinómios ortogonais mónicos cuja medida correspondente pertence a $\mathcal{M}_2$.

LEMA VIII.2. *Seja $\{\phi_n\}$ a sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada a $\mu \in \mathcal{M}_2$. Então (a_n) verifica* (4.1).

DEMONSTRAÇÃO. Da primeira condição de (4.1) podemos concluir que se $\mu \in \mathcal{M}_2$ então $\{\phi_n\}$ pertence a $\mathcal{S}$ (cf. Teorema III.2.5).

Para analisar a segunda necessitamos de mais informação sobre $(|a_n|)$. Comecemos por provar que esta sucessão é monótona decrescente. De facto, de (2.4), $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 2$ e $\alpha_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$ obtemos

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \quad n \geq 2 \tag{4.2}$$

$$a_n = |a_n| e^{i\theta}\,, \quad n \geq 2\,. \tag{4.3}$$

Agora temos dois casos a considerar:

- Se $\alpha < 1$ então de (2.4) obtemos $|a_{n+1}| < \alpha^{n-1}|a_2|$ e portanto $\sum |a_n| < \infty$ o que implica que se tenha segunda condição de (4.1).
- Se $\alpha = 1$ então de (4.2), (4.3) $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} |a_{n+1} - a_n| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} (|a_n| - |a_{n+1}|)$.

Podemos, então calcular

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} |a_k \sum_{m=k}^{\infty} |a_{m+1} - a_m|| &= \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \lim_{n\to\infty} \sum_{m=k}^{n} (-|a_{m+1}| + |a_m|) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| \lim_{n\to\infty} (-|a_{n+1}| + |a_k|) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|^2\,.
\end{aligned}$$

Mas $\{\phi_n\}$ pertence à $\mathcal{S}$, que é o que queríamos demonstrar. ■

OBSERVAÇÃO . Temos que se $\mu_2 \in \mathcal{M}_2$ então $d\mu(\theta) = \mu' d\theta + \lambda\delta(\theta)$.

Vejamos que $\lambda = 0$.

TEOREMA 4.2. *Se $\mu \in \mathcal{M}_2$ então $\lambda = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. De (2.4) sabemos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha_{n+1}$ e do Corolário VIII.1 este limite é menor do que ou igual a 1. Assim se, $0 < \alpha < 1$, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty$ então do Teorema III.4.1 $\lambda = 0$. Consideremos agora $\alpha = 1$. Neste caso tomemos $\psi_n(z) = z^{n-2}\psi_2(z)$ na (2.1) para $n \geq 2$, e obtemos depois de substituirmos por $z = 1$

$$\psi_2(1) = \phi_{n+1}(1) - \alpha_{n+1}\phi_n(1)\,.$$

De (2.4) sai que

$$\begin{aligned}\psi_2(1) &= \phi_{n+1}(1) - \frac{a_{n+1}}{a_n}\phi_n(1)\\ \frac{\psi_2(1)}{a_{n+1}} &= \frac{\phi_{n+1}(1)}{a_{n+1}} - \frac{\phi_n(1)}{a_n}\,.\end{aligned}$$

Logo, como $a_n = |a_n|e^{i\theta}$, para $n \geq 2$

$$\frac{\phi_{n+1}(1)}{|a_{n+1}|} = \frac{\phi_2(1)}{|a_2|} + \psi_2(1)B_n\,, \quad B_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{|a_{k+1}|}\,.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta equação obtemos

$$\frac{|\phi_{n+1}(1)|^2}{|a_{n+1}|^2} = \frac{|\phi_2(1)|^2}{|a_2|^2} + |\psi_2(1)|^2 B_n^2 + \zeta B_n\,, \quad \zeta = \frac{2\Re\mathrm{e}\left(\overline{\phi_2(1)}\psi_2(1)\right)}{|a_2|}\,.$$

Como $\psi_2(1) \neq 0$ (pela propriedade das raízes dos polinómios) e $B_n > n-1$, então

$$\frac{|\phi_{n+1}(1)|^2}{|a_{n+1}|^2} > \frac{1}{2}|\psi_2(1)|^2 B_n^2$$

para $n \geq n_0$, onde o número inteiro positivo n_0 depende da medida μ. Finalmente,

$$|\phi_{n+1}(1)|^2 > \frac{|\psi_2(1)|^2}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{k+1}}\right|\right)^2 > \frac{|\psi_2(1)|^2}{2}\,, \quad n \geq n_0. \tag{4.4}$$

É sabido que se estivermos na classe de Szegő as séries

$$\sum_{n\geq 0}|\phi_n(1)|^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 0}|\varphi_n(1)|^2$$

convergem simultaneamente. Então de (4.4) a série $\sum_{n\geq 0}|\varphi_n(1)|^2$ diverge e, consequentemente, não existe massa no ponto 0 (cf. e.g. [**57**, Th. 20.2], [**107**, (7), p. 435] ou [**149**, T. 41, p.82]). ∎

Podemos enunciar o seguinte resultado.

TEOREMA 4.3. *Toda a medida normalizada μ é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue e a sua função densidade é positiva e contínua no intervalo aberto* $(0, 2\pi)$.

Estamos em condições de enunciar o resultado fundamental deste Capítulo, que nos dá a representação para as medidas que estão em $\mathcal{M}_2$. Da comparação dos Teoremas 3.2 e 4.3 e dos Exemplos 2.1-2.3 (cf. Teorema 2.5) obtemos:

TEOREMA 4.4. *Uma medida de Borel μ sobre a circunferência pertence à classe $\mathcal{M}_2$ se e somente se for absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue e admitir a seguinte representação*

$$d\mu = C\,\frac{|1-\alpha z|^2\,d\theta}{|1-\overline{z_1}z|^2|1-\overline{z_2}z|^2}\,, \quad z=e^{i\theta}$$

com $0<|\alpha|\leq 1,\ |z_j|<1,\ j=1,2$ *e* $C>0$.

Os polinómios mónicos $\{\psi_n\}$ *definidos por* (2.1) *coincidem com os polinómios tipo Bernstein-Szegő e são ortogonais relativamente à medida* ν *definida por*

$$d\nu = C\,\frac{d\theta}{|1-\overline{z_1}z|^2|1-\overline{z_2}z|^2}\,, \quad z=e^{i\theta}.$$

CAPÍTULO IX

Modificações da Medida por meio de Exponenciais

1. Introdução	199
1.1. Problemas Espectrais para Matrizes de Jacobi e Polinómios Ortogonais	199
1.2. Solução do Problema Espectral, Transformações Consistentes das Matrizes de Jacobi e Medidas de Ortogonalidade	199
1.3. Deformações Isospectrais das Matrizes de Jacobi	200
1.4. Deformações Isomonodromicas das Matrizes de Jacobi	205
1.5. Resultado Principal	206
1.6. Considerações Gerais e Estrutura do Capítulo	208
2. Identidades para os Menores de Hankel	211
3. Deformações Isospectrais	216

1. Introdução

1.1. Problemas Espectrais para Matrizes de Jacobi e Polinómios Ortogonais. Existe, como vimos no Capítulo I, uma correspondência biunívoca entre duas características fundamentais de famílias de polinómios ortogonais $\{p_n\}$, por um lado a definição de p_n através da sua medida de ortogonalidade μ, $\operatorname{supp}\mu \subseteq \mathbb{R}$, i.e.

$$\int p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}\,, \quad n,m \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

ou por outro, a partir dos coeficientes (v_n), (b_n) da relação de recorrência a três termos, que p_n deve verificar (cf. Teorema I.2.1), i.e.

$$\begin{aligned} &xp_n = v_n p_{n+1} + b_n p_n + v_{n-1}p_{n-1} \text{ para } n = 1,2,\dots \\ &p_{-1} = 0\,, \quad p_0 = 1\,, \quad (v_n > 0\,, \quad \Im m b_n = 0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Sabemos já que associada a uma relação de recorrência a três termos, ou mesmo associada à medida μ, temos sempre uma matriz de Jacobi J.

Como exemplo da importância destas relações entre μ e J podemos mencionar a sua interpretação na teoria dos operadores. Pelo Teorema de Stone [**142**] se J é a representação matricial de um operador auto-adjunto, então $\operatorname{supp}\mu$ é o espectro do operador e μ é a sua medida espectral (veja-se [**1, 12, 120**]). Assim sendo podemos estabelecer como *problema espectral directo* : a partir dos coeficientes (v_n), (b_n) do operador J determinar a medida espectral, i.e.

$$J \quad \longrightarrow \quad \mu \tag{1.3}$$

e reciprocamente, a relação

$$\mu \quad \longrightarrow \quad J \tag{1.4}$$

é chamada *problema espectral inverso* (em [**88**] pode ver-se uma resenha de resultados sobre relações entre (1.3), (1.4)).

Estes problemas podem ser abordados de várias formas como vimos na Introdução.

1.2. Solução do Problema Espectral, Transformações Consistentes das Matrizes de Jacobi e Medidas de Ortogonalidade. Tendo-se em conta os processos gerais, somente se conhecem alguns casos em que se conseguiu resolver o problema espectral (1.3), (1.4). Entre eles podemos contar o caso dos polinómios ortogonais clássicos [**20, 26, 35, 96, 143**], e os polinómios ortogonais associados a matrizes de Jacobi periódicas [**33, 55, 125**]. Nestes casos conhecemos expressões para a medida de ortogonalidade μ assim como para os coeficientes da matriz de Jacobi J. Por exemplo, no caso dos polinómios de Hermite temos

$$\begin{cases} v_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{1/2} \\ b_n = 0 \end{cases} \qquad \longleftrightarrow \qquad d\mu(x) = \exp(-x^2)dx\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em alguns casos é possível apresentar a solução do problema espectral na forma de equações não-lineares (recorrentes ou diferenciais). Talvez o mais simples, foi apresentado por Shohat [**137**] e redescoberto mais tarde por Freud [**47**] (ver [**19**] para um estudo detalhado destes problemas):

$$\begin{cases} v_n^2(v_{n-1}^2 + v_n^2 + v_{n+1}^2) + 2tv_n^2 = n \\ b_n = 0 \end{cases}$$
$$\longleftrightarrow d\mu(x,t) = \exp(-x^4/4 - tx^2)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1.5}$$

Historicamente, devemos dizer que Laguerre [**83**] foi o primeiro que introduziu um método para obter fórmulas de recorrências não-lineares para os coeficientes de matrizes de Jacobi associadas a funções peso especiais (polinómios ortogonais semi clássicos), e que foi mais tarde desenvolvido em [**48, 49, 90**] e apresentados estes avanços de forma unificadora em [**88**].

Voltando ao exemplo de Shohat e Freud, de (1.5) vemos que a família de polinómios ortogonais depende de t, e portanto temos que J e μ variam com o tempo sofrendo modificações a que chamaremos deformações:

$$J(t) \quad \longleftrightarrow \quad \mu(x,t)\,. \tag{1.6}$$

Determinando outras deformações do estilo referido, levar-nos-á a estender a classe de polinómios ortogonais, para as quais podemos estudar o comportamento dos coeficientes da matriz de Jacobi a partir da medida de ortogonalidade, e vice versa.

1.3. Deformações Isospectrais das Matrizes de Jacobi. Um exemplo importante de deformação nos parâmetros da matriz de Jacobi J são as resultantes das chamadas *equações de Toda* [**144**]:

$$J(t):\ \begin{cases} \dfrac{dv_n(t)}{dt} = \dfrac{b_n(t)-b_{n-1}(t)}{2} v_n(t) \\ \dfrac{db_n(t)}{dt} = v_{n-1}^2(t) - v_n^2(t) \\ v_{-1} \equiv 0 \end{cases} , \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{1.7}$$

Esta deformação tem a particularidade de deixar invariante o espectro de $J(t)$, i.e. o $\operatorname{supp}\mu$ não depende de t [**45, 46, 71, 93**]. Uma *deformação* deste estilo é chamada *isospectral.* Este tipo de deformações foi descoberto por Gardner et al. em [**53**] quando provaram que a equação não-linear de Korteweg-de Vries é uma deformação isospectral de um operador de Sturm-Liouville, obtendo assim um método para resolver a equação de Korteweg-de Vries.

Uma característica geral dos operadores simétricos isospectrais $L(t)$ foi sugerida por Lax em [**85**]:

$$\frac{dL(t)}{dt} = AL - LA \tag{1.8}$$

onde A é um operador anti-simétrico. Ao par $\{L, A\}$ chamamos *par de Lax.*

Passamos a apresentar a demonstração do resultado de Lax enunciado por Nikishin em [**120**].

TEOREMA 1.1 (Lax). *Se $\lambda_n \in \mathbb{R}$ é um valor próprio de J, i.e se existe um polinómio não nulo f_n, com $\|f_n\| = 1$ tal que $Jf_n = \lambda_n f_n$ então $\dot{\lambda}_n = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Tomando derivadas em $Jf_n = \lambda_n f_n$, i.e.

$$\dot{J} f_n + J\dot{f}_n = \dot{\lambda}_n f_n + \lambda_n \dot{f}_n$$

e por (1.8) obtemos

$$(JA - AJ)f_n + J\dot{f}_n = \dot{\lambda}_n f_n + \lambda_n \dot{f}_n$$

e, porque λ_n é um valor próprio de J

$$\lambda_n A f_n - JAf_n + J\dot{f}_n = \dot{\lambda}_n f_n + \lambda_n \dot{f}_n$$

tomando produto interno com f_n

$$\lambda_n \langle Af_n, f_n\rangle - \langle JAf_n, f_n\rangle + \langle J\dot{f}_n, f_n\rangle = \dot{\lambda}_n \langle f_n, f_n\rangle + \lambda_n \langle \dot{f}_n, f_n\rangle\,.$$

Mas $\langle f_n, f_n\rangle = 1$ o que implica que $2\langle \dot{f}_n, f_n\rangle = 0$. Além disso, como A é uma matriz anti-simétrica, $\langle Af_n, f_n\rangle = 0$. Assim, usando a simetria do produto interno

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_n &= -\langle Af_n, Jf_n\rangle + \langle \dot{f}_n, Jf_n\rangle \\ &= -\lambda_n\langle Af_n, f_n\rangle + \lambda_n\langle \dot{f}_n, f_n\rangle\,. \end{aligned}$$

Logo $\dot{\lambda}_n = 0$, i.e. o espectro de J não depende de t. ■

Assim, a equação de Toda (1.7) pode ser reescrita na notação de Lax (1.8), com

$$L(t) = J(t) \quad \text{e} \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & d_1 & & & \\ -c_1 & 0 & c_2 & d_2 & & \\ -d_1 & -c_2 & 0 & c_3 & d_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

onde $c_n(t) = \frac{v_{n-1}}{2}$ e $d_n(t) = 0$.

Outro exemplo de deformação isospectral da matriz de Jacobi J foi obtido por Moser em [**110**] a partir do estudo do seguinte problema:

— Considerem-se os pontos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com $x_n < x_{n+1}$. Suponhamos que existe uma força actuando sobre eles segundo a lei exponencial

$$F_n = e^{-(x_n - x_{n-1})} - e^{-(x_{n+1}-x_n)}\,, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Determinar o comportamento dinâmico deste sistema de pontos sabendo que $x_n(0) = k_n$ e $\dot{x}_n(0) = \eta_n$.

Para resolver este problema temos somente que aplicar a segunda lei de Newton

$$\ddot{x}_n = e^{-(x_n - x_{n-1})} - e^{-(x_{n+1}-x_n)}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Fazendo a mudança de variáveis $\begin{cases} b_n = \dot{x}_n \\ v_n^2 = e^{-(x_{n+1}-x_n)} \end{cases}$ em (1.10) obtemos

$$J(t) : \begin{cases} \dfrac{dv_n(t)}{dt} = \dfrac{v_{n-1}^2(t) - v_{n+1}^2(t)}{2} v_n(t) \\ \dfrac{db_n(t)}{dt} = 0 \\ v_{-1} \equiv 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Estas equações são chamadas de *Langmuir* ou *equações de diferenças finitas de Korteweg-de Vries* (cf. [**9, 75, 93**]). Além disso, como se vê a partir de [**110**] as equações (1.7) e (1.11) possuem além da propriedade isospectral uma modificação simples da medida de ortogonalidade:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n(t)}{dt} = \dfrac{b_n(t) - b_{n+1}(t)}{2} v_n(t) \\ \dfrac{db_n(t)}{dt} = v_{n-1}^2(t) - v_{n+1}^2(t) \end{cases} \longleftrightarrow d\mu(x,t) = \frac{\exp(-xt)d\mu(x,0)}{\int \exp(-xt)d\mu(x,0)} \tag{1.12}$$

e

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n(t)}{dt} = \dfrac{v_{n-1}^2(t) - v_{n+1}^2(t)}{2} v_n(t) \\ \dfrac{db_n(t)}{dt} = 0\,, \quad b_n(0) = 0 \\ v_{-1} \equiv 0 \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow d\mu(x,t) = \frac{\exp(-x^2 t)d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^2 t)d\mu(x,0)}\,. \tag{1.13}$$

Vejamos agora a demonstração destes dois resultados efectuada por Nikishin e Sorovkin em [**120**].

TEOREMA 1.2. *Seja* $\{p_n\}$ *a sucessão de polinómios ortonormais associada à matriz de Jacobi* J. *Se* J *verifica* (1.8) *com* A *determinada por* (1.7) *e* (1.11) *então a medida associada a* $\{p_n\}$ *é do tipo*

$$d\mu(x,t) = \frac{\exp(-x^p t)d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^p t)d\mu(x,0)} \tag{1.14}$$

onde $d\mu(x,0)$ *é a medida associada a* $J(0)$ *e* $p = 1, 2$, *respectivamente.*

DEMONSTRAÇÃO. É bem sabido que a medida espectral admite a seguinte representação

$$\chi(z;\mu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{m_n(t)}{z - \lambda_n} \tag{1.15}$$

onde $m_n(t)$ é a função de Christoffel. Definamos $g_n = [p_0(\lambda_n)\ p_1(\lambda_n)\ \ldots]^t$, i.e.

$$g_n = \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j(\lambda_n) e_j \quad \text{onde} \quad e_j = [0\ \ldots\ 0\ 1\ 0\ \ldots]^t$$

logo $Jg_n = \lambda_n g_n$. Além disso,

$$\frac{1}{m_n(t)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} (p_k(\lambda_n))^2 = \langle g_n, g_n \rangle \tag{1.16}$$

e portanto, obtemos depois de tomar derivadas sobre $Jg_n = \lambda_n g_n$ e aplicar (1.8), $J(\dot{g}_n - Ag_n) = \lambda_n(\dot{g}_n - Ag_n)$. Como o espaço próprio associado a λ_n é unidimensional, podemos ver que existe $s_n \neq 0$ tal que

$$\dot{g}_n = Ag_n + s_n g_n\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Tomando o produto interno com g_n na última equação

$$\langle \dot{g}_n, g_n \rangle = \langle A g_n, g_n \rangle + s_n \langle g_n, g_n \rangle$$

e portanto $\frac{1}{2}\frac{d\langle g_n, g_n\rangle}{dt} = s_n \langle g_n, g_n \rangle$. Daqui obtemos que $\langle g_n, g_n \rangle = e^{2 s_n t}$. Colocando esta expressão em (1.16) obtemos $m_n(t) = e^{-2 s_n t}$. De (1.15) obtemos

$$\chi(z;\mu) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{e^{-2 s_n t}}{z - \lambda_n}\,. \tag{1.18}$$

Comparando os coeficientes de (1.17) concluímos que $s_n = -\frac{\lambda_n^p}{p} + C(t)$, logo $\frac{1}{m_n(t)} = \frac{1}{m_n(0)} S(t) \exp(t\lambda_n^p)$ com $p = 1, 2$. Assim,

$$\chi(z;\mu) = \frac{1}{S(t)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{m_n(0)\exp(-t\lambda_n^p)}{z - \lambda_n} \tag{1.19}$$

Mas

$$\chi(z;\mu) \sim \frac{1}{z} \quad \text{para} \quad z \to \infty$$

logo $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(0)\exp(-t\lambda_n^p)$. Substituindo em (1.19) $S(t)$ por esta expressão obtemos

$$\chi(z;\mu) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{m_n(0)\exp(-t\lambda_n^p)}{z-\lambda_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} m_n(0)\exp(-t\lambda_n^p)}\,.$$

Da Definição I.4.1 se obtém que $d\mu$ vem dada em termos da medida inicial $d\mu(.,0)$ por (1.14). ■

OBSERVAÇÃO . Note que a transformação (1.12) é válida para qualquer conjunto de dados iniciais $\{v_n(0) > 0\,, \quad \Im m b_n(0) = 0\}$ ou $d\mu(x, 0)$; o mesmo se mantém verdadeiro para (1.13) com dados iniciais $\{v_n(0) > 0\,, \quad b_n(0) = 0\}$, e qualquer $d\mu(x, 0)$ simétrica relativamente à origem. Desta forma, tomando uns dados iniciais especiais, as equações não-lineares (1.12), (1.13) podem ser reduzidas a uma forma simples ou até ser resolvidas como no exemplo de Shohat-Freud (1.5), que corresponde ao caso Langmuir (1.13) com $d\mu(x, 0) = \exp(-x^4/4)dx$, $x \in \mathbb{R}$. Se $d\mu(x, 0)$ tem como suporte um conjunto de intervalos disjuntos, em [**8**] o autor deu o comportamento assimptótico dos parâmetros $v_n(t)$ e $b_n(t)$ de (1.12) em termos de funções theta de Riemann.

Seguindo a notação de [**92**], as *equações* não-lineares para os coeficientes da matriz de Jacobi do tipo seguinte são chamadas de *tipo Toda*:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dv_n(t)}{dt} = F(v_n, \ldots, v_{n\pm p}, b_n, \ldots, b_{n\pm p}) \\ \dfrac{db_n(t)}{dt} = G(v_n, \ldots, v_{n\pm p}, b_n, \ldots, b_{n\pm p}) \end{array}\right., \quad n \in \mathbb{N}$$

onde F, G são polinómios, p é fixo independente de n e $v_\nu, b_\nu \equiv 0$ para ν negativo. As *transformações da medida* da forma (1.14) são chamadas *tipo Freud*.

1.4. Deformações Isomonodrómicas das Matrizes de Jacobi. Mencionemos outro método para obter deformações consistentes do tipo (1.6) que foi primeiramente apresentado por G.V. Chudnovsky em [**37**], e está baseado em algumas ideias de B. Riemann. Este método é aplicado para alguns pesos especiais que satisfazem equações diferenciais de coeficientes racionais (por exemplo, polinómios ortogonais semi clássicos). O método baseia-se em determinar deformações para a matriz de Jacobi tais que o grupo de monodromia para a função peso se mantenha inalterável. Recentemente, este método foi utilizado por A. Magnus em [**92**]. Comparando este método com o que aqui nos traz, vemos que este serve somente para dados iniciais devidamente escolhidos, no entanto permite obter resultados de uma forma mais simples. Além disso, é aplicável a *funções peso*, $w(.,t)$, que são *semi clássicas generalizadas* no sentido que Magnus defeniu em [**92**], i.e. existem polinómios $\phi(.,t)$ e $\psi(.,t)$ tais que

$$\phi(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t)w(x,t).$$

As medidas que aqui vamos estudar, (1.14), não incluem todos os casos de medidas semi clássicas generalizadas mas por outro lado permitem-nos estudar outro tipo de medidas que não estão incluídas nesta classe. De facto, derivando em ordem a x (1.14)

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}w(x,t)}{w(x,t)} = -px^{p-1}t + \frac{\frac{\partial}{\partial x}w(x,0)}{w(x,0)}.$$

Agora, quando $w(x,0)$ não é semi clássica vemos que este quociente não é uma fracção racional em x, não sendo por isto uma medida semi clássica generalizada.

1.5. Resultado Principal. Neste capítulo estudamos modificações isospectrais de matrizes de Jacobi por transformações do tipo Freud na medida espectral. Obtemos para p arbitrário em (1.14), as equações do tipo Toda para os coeficientes da matriz de Jacobi associada. Antes de apresentarmos o resultado fundamental, vamos introduzir algumas notações.

Para todo o $p = -1, 0, 1, \dots$, definimos recursivamente

$$\mathcal{V}_{p,k,n}\,, \quad k \leq p\,, \quad n = 0, 1, \dots$$

pelo esquema

$$\left.\begin{array}{l} (p=-1)\mathcal{V}_{-1,k,n} = 0 \\ (p=0)\mathcal{V}_{0,k,n} = 1 \\ (p \geq 1)\mathcal{V}_{p,k,n} = \begin{cases} 0 & k = p \\ \sum_{m=k}^{p-1}(v_{n-1+m}^2 \mathcal{V}_{p-2,m-1,n} + b_{n+m}^2 \mathcal{V}_{p-1,m,n}) & k < p \end{cases} \end{array}\right\} \text{(A)}$$

onde $(v_n), (b_n)$ são os elementos da matriz de Jacobi (1.3), e convencionamos $v_\nu = b_\nu = 0$ para $\nu < 0$.

Para calcular $\mathcal{V}_{p,k,n}$ procedemos da seguinte forma: começamos por calcular $\mathcal{V}_{-1,k,n}, \mathcal{V}_{0,k,n}, \mathcal{V}_{1,1,n}$; definimos a partir destes $\mathcal{V}_{1,k,n}$ para $k = 0, -1, -2, \dots$ a partir da fórmula

$$\mathcal{V}_{p,k,n} = \mathcal{V}_{p,k+1,n} + v_{n-1+k}^2 \mathcal{V}_{p-2,k-1,n} + b_{n+k}\mathcal{V}_{p-1,k,n} \tag{1.20}$$

que resulta de (A); agora, a partir de $\mathcal{V}_{0,k,n}, \mathcal{V}_{1,k,n}, \mathcal{V}_{2,2,n}$ e de (1.20) calculamos $\mathcal{V}_{2,k,n}$ para $k = 1, 0, -1, -2, \dots$; e assim sucessivamente.

Como exemplo do método acima descrito veja-se

$$\begin{array}{llll} \mathcal{V}_{1,0,n} = b_n & \mathcal{V}_{1,-1,n} = b_n + b_{n-1} & \mathcal{V}_{1,-2,n} = b_n + b_{n-1} + b_{n-2} & \dots \\[1ex] \mathcal{V}_{2,1,n} = v_n^2 & \mathcal{V}_{2,0,n} = v_n^2 + v_{n-1}^2 + b_n^2 & \begin{array}{l}\mathcal{V}_{2,-1,n} = v_n^2 + v_{n-1}^2 + b_n^2 \\ \quad + v_{n-2}^2 + b_{n-1}(b_n + b_{n-1})\end{array} & \dots \\[1ex] \mathcal{V}_{3,2,n} = 0 & \mathcal{V}_{3,1,n} = v_n^2(b_n + b_{n+1}) & \begin{array}{l}\mathcal{V}_{3,0,n} = b_n(v_n^2 + v_{n-1}^2 + b_n^2) \\ \quad + v_n^2(b_n + b_{n+1}) \\ \quad + v_{n-1}^2(b_n + b_{n-1})\end{array} & \dots \end{array}$$

Enunciemos agora o resultado fundamental deste capítulo.

TEOREMA 1.3. *Sejam $p \in \mathbb{N}$, $\mu(x,0)$ uma medida de probabilidade com parâmetros da matriz de Jacobi associada $(v_n(0))$, $(b_n(0))$ tais que $v_n(0) > 0$,*

$\Im m b_n(0) = 0$, *então*

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n}{dt} = (\mathcal{V}_{p,0,n} - \mathcal{V}_{p,0,n+1})\dfrac{v_n}{2} \\ \dfrac{db_n}{dt} = \mathcal{V}_{p+1,1,n-1} - \mathcal{V}_{p+1,1,n} \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow d\mu(x,t) = \frac{\exp(-x^p t) d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^p t) d\mu(x,0)} \tag{1.21}$$

i.e. os coeficientes da matriz de Jacobi satisfazem uma equação tipo Toda, se e somente se a medida de ortogonalidade se comporta como uma transformação tipo Freud.

Consideremos agora alguns corolários deste teorema. Para $p = 1$, (1.21) coincide com as equações de Toda (1.12). Mas quando $p = 2$, obtemos de (1.21) um resultado novo

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n}{dt} = (v_{n-1}^2 - v_{n+1}^2 + b_n^2 - b_{n+1}^2)\dfrac{v_n}{2} \\ \dfrac{db_n}{dt} = v_{n-1}^2 b_{n-1} + (v_{n-1}^2 - v_n^2) b_n - v_n^2 b_{n+1} \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow d\mu(x,t) = \frac{\exp(-x^2 t) d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^2 t) d\mu(x,0)}$$

que generaliza as equações de Langmuir (1.13), pois no Teorema 1.3 não nos restringimos a dados iniciais simétricos. Para $p = 3$ e $p = 4$ o Teorema 1.3 dá-nos

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n}{dt} = \Big[-v_{n+1}^2(2b_{n+1} + b_{n+2}) + v_{n-1}^2(2b_n + b_{n-1}) \\ \qquad\qquad - (b_{n+1} - b_n)(v_n^2 + b_{n+1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}b_n)\Big]\dfrac{v_n}{2} \\ \dfrac{db_n}{dt} = v_n^2(b_{n+1}^2 + b_n^2 + b_{n+1}b_n) - v_{n-1}^2(b_n^2 + b_{n-1}^2 + b_n b_{n-1}) \end{cases}$$

$$\longleftrightarrow d\mu(x,t) = \frac{\exp(-x^3 t) d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^3 t) d\mu(x,0)}$$

e associado a

$$d\mu(x,t) = \frac{\exp(-x^4 t) d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^4 t) d\mu(x,0)}$$

temos

$$\begin{cases} \dfrac{dv_n^2}{dt} = \big[v_{n+1}^2(v_{n+2}^2 + v_{n+1}^2 + v_n^2 + 3b_{n+1}^2 + b_{n+2}^2 + 2b_{n+2}b_{n+1}) \\ \qquad\qquad - v_{n-1}^2(v_n^2 + v_{n-1}^2 + v_{n-2}^2 + 3b_n^2 + b_{n-1}^2 + 2b_nb_{n-1}) \\ \qquad\qquad + (b_{n+1} - b_n)(2v_n^2 + b_{n+1}^3 + b_n^3 + b_{n+1}^2b_n + b_{n+1}b_n^2)\big]\, v_n^2 \\ \dfrac{db_n}{dt} = v_n^2\left[v_{n+1}^2(b_n + 2b_{n+1} + b_{n+2}) + b_{n+1}^3 + b_n^3 + b_{n+1}^2b_n + b_{n+1}b_n^2\right. \\ \qquad\qquad \left.+ 2v_n^2(b_n + b_{n+1})\right] - v_{n-1}^2\left[+v_{n-2}^2(b_{n-2} + 2b_{n-1} + b_n)\right. \\ \qquad\qquad \left.+ 2v_{n-1}^2(b_{n-1} + b_n) + b_{n-1}^3 + b_n^3 + b_{n-1}^2b_n + b_{n-1}b_n^2\right] \end{cases}$$

respectivamente. Os casos $p \geq 3$ não foram considerados antes. Podemos, além do mais apresentar a representação de Lax para as equações de Toda do Teorema 1.3. Usando a notação de (1.8) e (1.9) temos para $p = 2$:

$$d_n = \frac{v_nv_{n-1}}{2}, \quad c_n = \frac{v_{n-1}}{2}(b_n + b_{n-1})$$

para $p = 3$:

$$\begin{cases} d_n = \dfrac{v_nv_{n-1}}{2}(b_{n+1} + b_n + b_{n-1}) \\ c_n = \dfrac{v_{n-1}}{2}(b_n^2 + b_{n-1}^2 + b_nb_{n-1} + v_n^2 + v_{n-1}^2 + v_{n-2}^2) \end{cases}$$

e para $p = 4$:

$$\begin{cases} c_{n+1} = -\dfrac{v_n}{2}\left[v_{n+1}^2(b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n) + 2v_n^2(b_{n+1} + b_n)\right. \\ \qquad \left.+ v_{n-1}^2(b_{n+1} + b_n + b_{n-1}) + b_n^3 + b_{n+1}^3 + b_{n+1}^2b_n + b_{n+1}b_n^2\right] \\ d_{n+1} = -\dfrac{v_nv_{n+1}}{2}(v_{n+2}^2 + v_{n+1}^2 + v_n^2 + v_{n-1}^2 \\ \qquad + b_{n+2}^2 + b_{n+1}^2 + b_n^2 + b_{n+2}b_{n+1} + b_{n+2}b_n + b_nb_{n+1}) \end{cases}$$

Tendo em consideração que as transformações de Freud (1.14) possuem a propriedade de isomonodromia para algumas medidas iniciais $d\mu(x,0)$ do tipo semi clássico [**92**], será interessante combinar nestes casos as equações de Toda com as deformações isomonodrómicas. Note-se que Magnus não considerou em [**92**], nenhum exemplo de transformações de Freud com $p > 2$.

1.6. Considerações Gerais e Estrutura do Capítulo. Por forma a demonstrarmos o Teorema 1.3, vamos ter de resolver um problema espectral inverso, i.e. para as medidas de ortogonalidade da forma (A) teremos de determinar os correspondentes coeficientes $(v_n), (b_n)$ como em (1.2) a partir dos determinantes de Hankel,

$$H_n = \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix} \tag{1.22}$$

onde (S_n) são os momentos associados à medida de ortogonalidade. Como é sabido (cf. [**1, 120, 143**]), as sucessões de polinómios ortogonais mónicos (cf. (1.1), $p_n(x) = \kappa_n P_n(x)$)

$$P_n(x) = x^n + \ell_{1,n} x^n + \cdots + \ell_{n,n}$$

admitem a representação (I.1.1) em termos dos determinantes de Hankel e isto dá-nos uma expressão para os coeficientes de P_n

$$\ell_{k,n} = \frac{(-1)^k}{H_n} \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_{n-k-1} & S_{n-k+1} & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-k-2} & S_{2n-k} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix}. \tag{1.23}$$

A relação de recorrência a três termos para a sucessão de polinómios ortogonais mónicos $\{P_n\}$ vem dada por

$$xP_n = P_{n+1} + b_n P_n + v_{n-1}^2 P_{n-1} \tag{1.24}$$

donde se conclui que

$$\begin{cases} v_n^2 = \dfrac{H_n}{H_{n+1}} \dfrac{H_{n+2}}{H_{n+1}} \\ b_n = \ell_{1,n} - \ell_{1,n+1} \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Desta forma temos a solução do problema espectral inverso (1.23), dada em termos dos determinantes de Hankel e seus menores.

Na Secção 2 demonstramos algumas igualdades válidas para os menores de Hankel. No estudo que vamos realizar para o cálculo de $\ell_{1,n}$ e H_n o seguinte determinante vai jogar um papel fundamental

$$L_{j,n} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \dots & S_{2n-1} \\ S_{n+j} & S_{n+j+1} & \dots & S_{2n+j} \end{vmatrix}, , \quad \mathcal{L}_{j,n} = \frac{L_{j,n}}{H_{n+1}}.$$

Para estes determinantes vamos mostrar que são válidas as seguintes igualdades (cf. Teorema 2.2 da Secção 2)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n+k}\mathcal{L}_{p-k,n+k} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n+p}\mathcal{L}_{p-k,n} = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n+\nu}\mathcal{L}_{p-k,n} = \mathcal{V}_{p,\nu,n} \end{array}\right\} \tag{1.26}$$

Na Secção 2, consideramos também outros menores de Hankel (cf. Teorema 2.1 da Secção 2) como são

$$I_{j,n}^{k} = \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-(k+1)} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-(k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_n & \dots & S_{2n} \\ S_{n-k+j} & \dots & S_{2n-k+j} \end{vmatrix}, \quad J_{j,n}^{k} = \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-(k+1)} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-(k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-1} \\ S_{n+1} & \dots & S_{2n+1} \\ S_{n-k+j} & \dots & S_{2n-k+j} \end{vmatrix}$$

Tendo em atenção que os determinantes de Hankel têm uma importância intrínseca, pode concluir-se que as identidades do tipo (1.26) podem ter interesse independentemente do estudo das equações de Toda ou das transformações de Freud.

Na Secção 3 relacionamos os determinantes $\ell_{1,n}$ e H_n com os acima expostos quando a medida vem alterada por uma transformação tipo Freud (1.14). Para tal vamos necessitar saber como se comportam os momentos por estas transformações. A partir de (1.14) vemos que

$$\frac{dS_k(t)}{dt} = -S_{k+p}(t) + S_p(t)S_k(t)\,, \quad k = 0, 1, \dots \tag{1.27}$$

Para $p = 2$, esta equação foi obtida pela primeira vez por Kac e Moerbeke [**75**] (para mais detalhes consultar [**9**]).

Como derivando formalmente (1.25) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{dt} &= \left[\left(\frac{\dot H_{n+2}}{H_{n+2}} - \frac{\dot H_{n+1}}{H_{n+1}}\right) - \left(\frac{\dot H_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{\dot H_n}{H_n}\right)\right]\frac{v_n}{2} \\ \frac{db_n}{dt} &= -\dot\ell_{1,n+1} + \dot\ell_{1,n} \end{aligned} \tag{1.28}$$

necessitamos conhecer $\dot{H}_n/H_n$ e $\dot{\ell}_{1,n}$. Para tal basta tomar derivadas nos determinantes de Hankel e em $\ell_{1,n}$, i.e. (1.22) e (1.23), respectivamente, tendo em consideração a lei (1.27). Depois usamos as identidades deduzidas na Secção 2 obtemos $\dot{H}_n/H_n$ (cf. Teorema 3.1) e $\dot{\ell}_{1,n}$ (cf Teorema 3.2). Finalmente, o Teorema 1.3 é um corolário imediato dos Teoremas 3.1 e 3.2.

Como conclusão, queremos deixar claro que estes resultados têm um carácter formal. O nosso objectivo foi somente o de obter as equações (1.21). Será interessante realizar um estudo conducente ao comportamento assimptótico das soluções da equação (1.21). Nesse caso teríamos um método alternativo ao estudo realizado em [**88, 89, 92, 115, 128**] do comportamento assimptótico dos coeficientes da relação de recorrência a três termos dos polinómios ortogonais associados a medidas do tipo Freud.

2. Identidades para os Menores de Hankel

Nesta secção damos várias identidades para os menores de Hankel (1.22). Estas serão de grande utilidade no que se segue.

Como dissemos na Introdução, vamos considerar três tipos de menores de Hankel. O primeiro é $L_{j,n}$, que se obtem de H_{n+1} substituindo na última linha de H_{n+1} os índices m por $m+j$, $m = n, n+1, \ldots, 2n$

$$L_{j,n} = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \ldots & S_n \\ S_1 & S_2 & \ldots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \ldots & S_{2n-1} \\ S_{n+j} & S_{n+j+1} & \ldots & S_{2n+j} \end{vmatrix}, \quad n, j = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

Note-se que $L_{0,n} = H_{n+1}$. O segundo, que denotaremos por $I^k_{j,n}$ é obtido de H_{n+1} transferindo a linha $n-j+1$ para a última linha do determinante avançando os índices j unidades

$$I^k_{j,n} = \begin{vmatrix} S_0 & \ldots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \ldots & S_{2n-(k+1)} \\ S_{n-(k-1)} & \ldots & S_{2n-(k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_n & \ldots & S_{2n} \\ S_{n-k+j} & \ldots & S_{2n-k+j} \end{vmatrix}, \quad n, j = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2.2}$$

Assim, $I^0_{j,n} = L_{j,n}$. O terceiro determinante, que denotaremos por $J^k_{j,n}$ obtem-se de H_{n+1} avançando primeiro uma unidade os índices dos elementos da última linha do determinante e efectuando de seguida uma modificação do tipo realizada para obter $I^k_{j,n}$

$$J^k_{j,n} = \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-(k+1)} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-(k-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-1} \\ S_{n+1} & \dots & S_{2n+1} \\ S_{n-k+j} & \dots & S_{2n-k+j} \end{vmatrix}, \quad n, j = 0, 1, \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \tag{2.3}$$

Para simplificar a notação definimos:

$$\mathcal{L}_{j,n} = \frac{L_{j,n}}{H_{n+1}}, \quad \mathcal{I}^k_{j,n} = \frac{I^k_{j,n}}{H_{n+1}}, \quad \mathcal{J}^k_{j,n} = \frac{J^k_{j,n}}{H_{n+1}}. \tag{2.4}$$

Veremos que neste processo, os menores de Hankel, que representam os coeficientes dos polinómios ortogonais terão um papel importante (cf. (1.23)).

Apresentamos agora fórmulas de recorrência que relacionam estas quantidades:

TEOREMA 2.1. *Para* $j = 1, 2, \dots,$ *e* $k = 0, 1, \dots, j-1$ *temos*

$$\mathcal{I}^k_{j,n} = -\mathcal{I}^{k+1}_{j,n+1} + (-1)^{k+1}\mathcal{I}^0_{j-(k+1),n+1}\ell_{k+1,n+1} \tag{2.5}$$

$$\mathcal{J}^k_{j,n} = \mathcal{J}^{k+1}_{j,n+1} + (-1)^{k+1}\mathcal{J}^1_{j-k,n+1}\ell_{k+1,n+1} \tag{2.6}$$

onde $\mathcal{I}^k_{j,n}$, $\mathcal{J}^k_{j,n}$ *e* $\ell_{k,n}$ *vêm dados por* (2.2), (2.3) *e* (1.23), *respectivamente.*

DEMONSTRAÇÃO. Para demonstrarmos que se tem (2.5), começamos por considerar $I^k_{j,n}$ e construímos a partir dele dois determinantes mais por adição de uma linha e uma coluna devidamente escolhida. Obtemos assim, por um lado

$$L_{j-(k+1),n+1} = \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-(k+1)} & S_{2n-(k+1)} \\ S_{n-k} & \dots & S_{2n-k} & \boxed{S_{2n-k+1}} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-(k-1)} & S_{2n-(k-1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-1} & S_{2n} \\ S_n & \dots & S_{2n} & S_{2n+1} \\ S_{n-k+j} & \dots & S_{2n-k+j} & S_{2n-k+j+1} \end{vmatrix}$$

e por outro

$$I^{k+1}_{j,n+1} = \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-(k+1)} & S_{2n-k} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-(k-1)} & S_{2n-k+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-1} & S_{2n} \\ S_{n+1} & \dots & S_{2n+1} & \boxed{S_{2n+2}} \\ S_{n-k+j} & \dots & S_{2n-k+j} & S_{2n-k+j+1} \end{vmatrix}$$

Note-se que os complementos algébricos correspondentes à linha $n-k+1$ do determinante $L_{j-(k+1),n+1}$, i.e. $(S_{n-k}, \dots, S_{2n-k+1})$ coincide (a menos de sinais) com os complementos algébricos correspondentes à linha $n+1$ do determinante $I^{k+1}_{j,n+1}$.

Denotando estes complementos algébricos por $(A_\nu)_{\nu=0}^{n+1}$ e tendo em atenção que $A_{n+1} = -I^k_{j,n}$ obtemos

$$\begin{cases} S_{n-k}A_0 + \dots + S_{2n-k}A_n + S_{2n-k+1}(-I^k_{j,n}) = I^{k+1}_{j,n+1} \\ S_{n+1}A_0 + \dots + S_{2n+1}A_n + S_{2n+2}(-I^k_{j,n}) = (-1)^k L_{j-(k+1),n+1} \end{cases} \tag{2.7}$$

Por outro lado, podemos escrever mais $n-1$ igualdades,

$$\begin{cases} S_0A_0 + \dots + S_nA_n + S_{n+1}(-I^k_{j,n}) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ S_{n-k-1}A_0 + \dots + S_{2n-k-1}A_n + S_{2n-k}(-I^k_{j,n}) = 0 \\ S_{n-k+1}A_0 + \dots + S_{2n-k+1}A_n + S_{2n-k+2}(-I^k_{j,n}) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ S_nA_0 + \dots + S_{2n}A_n + S_{2n+1}(-I^k_{j,n}) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

De (2.7) e (2.8) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} S_0 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-k} \\ S_{n-k} & \dots & S_{2n-k+1} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-k+2} \\ \vdots & & \vdots \\ S_n & \dots & S_{2n+1} \\ S_{n+1} & \dots & S_{2n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ \\ A_l \\ \\ \vdots \\ A_n \\ -I^k_{j,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^k L_{j-(k+1),n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I^{k+1}_{j,n+1} \end{bmatrix}$$

Resolvendo-o a respeito de $-I^k_{j,n}$ e usando a representação dos coeficientes da sucessão de polinómios ortogonais mónicos (1.23) vemos que

$$-I^k_{j,n} = \frac{I^{k+1}_{j,n+1} H_{n+1} + (-1)^k L_{j-(k+1),n+1} \ell_{k+1,n+1} H_{n+1}}{H_{n+2}}$$

que por (2.2) e (2.4), nos dá (2.5).

Da mesma forma, provamos (2.6). Começamos por considerar dois determinantes $I^{k+1}_{j,n+1}$ e $I^1_{j-k,n+1}$. A partir da decomposição do determinante $I^1_{j-k,n+1}$ nos complementos algébricos associados à linha $(S_{n-k}, \dots, S_{2n-k+1})$ e dos complementos algébricos associados à linha $(S_n, \dots, S_{2n+1})$ de $I^{k+1}_{j,n+1}$ obtemos

$$\begin{bmatrix} S_0 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-(k+1)} & \dots & S_{2n-k} \\ S_{n-k} & \dots & S_{2n-k+1} \\ S_{n-(k-1)} & \dots & S_{2n-k+2} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n} \\ S_n & \dots & S_{2n+1} \\ S_{n+1} & \dots & S_{2n+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ \\ A_l \\ \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ A_n \\ J^k_{j,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^k I^1_{j-k,n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I^{k+1}_{j,n+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde se conclui que

$$J^k_{j,n} = \frac{I^{k+1}_{j,n+1} \ell_{1,n+1} H_{n+1} + (-1)^k I^1_{j-k,n+1} \ell_{k+1,n+1} H_{n+1}}{H_{n+2}}$$

que facilmente nos dá (2.6). ■

Determinemos uma representação para $\mathcal{V}_{p,k,n}$.

TEOREMA 2.2. *Para* $p = 1, 2, \ldots$ *e* $k = 0, 1, \ldots, p$ *temos*

$$\sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n+k} \mathcal{L}_{p-k,n+k} = 0 \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n+p} \mathcal{L}_{p-k,n} = 0 \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n+\nu} \mathcal{L}_{p-k,n} = \mathcal{V}_{p,\nu,n} \tag{2.11}$$

onde $\mathcal{L}_{p,n}$ *e* $\ell_{k,n}$ *vêm dados por* (2.1), (2.4) *e* (1.23), *respectivamente, e* $\mathcal{V}_{p,k,n}$ *está definida por* (A).

DEMONSTRAÇÃO. De (2.5) obtemos (2.9). De facto, tendo em atenção que $\mathcal{I}^0_{p,n} = \mathcal{L}_{p,n}$ tomando $n+\nu$ em vez de n nos índices, a identidade (2.5) toma a forma

$$-\mathcal{I}^{\nu}_{p,n+\nu} = \mathcal{I}^{\nu+1}_{p,n+\nu+1} + (-1)^{\nu} \mathcal{L}_{p-(\nu+1),n+\nu+1} \ell_{1,n+1}\,. \tag{2.12}$$

Tomando agora $\nu = 0$ em (2.12)

$$-\mathcal{L}_{p,n} = \mathcal{I}^1_{p,n+1} + \mathcal{L}_{p-1,n+1} \ell_{1,n+1}$$

e aplicando sucessivamente (2.12) obtemos

$$-\mathcal{L}_{p,n} = (-1)^k \mathcal{I}^{k+1}_{p,n+k+1} + \sum_{\nu=0}^{k} \mathcal{L}_{p-(\nu+1),n+\nu+1} \ell_{\nu+1,n+\nu+1}.$$

Para $k = p - 1$, a útima igualdade dá-nos (2.9) pois $\mathcal{I}^p_{p,n} = 0$ e $\ell_{0,n} = 1$.

A segunda igualdade é um corolário da fórmula de Szegő para os polinómios ortogonais (cf. (I.1.1)). Por definição

$$\mathcal{L}_{p,n} = \int x^{n+p} P_n(x) d\mu(x).$$

Substituindo

$$x^{n+p} = P_{n+p} - \left\{ \ell_{1,n+p} x^{n+p-1} + \ldots + \ell_{p,n+p} x^n + \ldots \right\}$$

no último integral obtemos, usando a ortogonalidade (1.1),

$$\mathcal{L}_{p,n} = -\sum_{\nu=1}^{p} \ell_{\nu,n+p} \int x^{n+p-\nu} P_n(x) d\mu(x) = -\sum_{\nu=1}^{p} \ell_{\nu,n+p} \mathcal{L}_{p-\nu,n}$$

que nos dá (2.10) directamente.

Temos somente que provar a última identidade. Para tal, consideremos (2.10)

$$\sum_{\nu=0}^{p} \ell_{p-\nu,n+k}\mathcal{L}_{\nu,n} = \mathcal{L}_{p,n} + \sum_{\nu=0}^{p-1} \ell_{p-\nu,n+k}\mathcal{L}_{\nu,n} = \sum_{\nu=0}^{p-1}(\ell_{p-\nu,n+k} - \ell_{p-\nu,n+p})\mathcal{L}_{\nu,n}$$

e adicionando algebricamente termos intermédios, e usando (I.2.7) com a convenção $\ell_{-1,n} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{p} \ell_{p-\nu,n+k}\mathcal{L}_{\nu,n} \\
&\quad = \sum_{k_1=0}^{p-k-1} \sum_{\nu=0}^{p-1}(\ell_{p-\nu,n+k+k_1} - \ell_{p-\nu,n+k+k_1+1})\mathcal{L}_{\nu,n} \\
&\quad = \sum_{k_1=0}^{p-k-1} (v_{n+k+k_1-1}^2 \sum_{\nu=0}^{p-1} \ell_{p-\nu-2,n-1+k+k_1} + b_{n+k+k_1} \sum_{\nu=0}^{p-1} \ell_{p-\nu-1,n+k+k_1})\mathcal{L}_{\nu,n}\,.
\end{aligned}$$

Tomando $m = k + k_1$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=0}^{p} \ell_{p-\nu,n+k}\mathcal{L}_{\nu,n} \\
&\qquad = \sum_{k=m}^{p-1}(v_{n-1+m}^2 \sum_{\nu=0}^{p-2} \ell_{p-\nu-2,n-1+m} + b_{n+m} \sum_{\nu=0}^{p-1} \ell_{p-\nu-1,n+m})\mathcal{L}_{\nu,n} \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Daqui se conclui que (2.11) e (2.13) coincidem com a definição de $\mathcal{V}_{p,k,n}$ dada no esquema (A). ∎

3. Deformações Isospectrais

Nesta secção estudámos o comportamento dos momentos, determinantes de Hankel e relação de recorrência a três termos associados à sucessão de polinómios mónicos ortogonais relativamente a uma transformação de Freud da medida de ortogonalidade (1.14).

Vejamos como se comportam os momentos. Tomando derivadas em

$$S_k(t) = \int x^k d\mu(x,t) = \frac{\int x^k \exp(-x^p t) d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^p t) d\mu(x,0)}$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{dS_k(t)}{dt} &= -\frac{\int x^{k+p} \exp(-x^p t) d\mu(x,0)}{\int \exp(-x^p t) d\mu(x,0)} \\
&\qquad + \frac{\int x^p \exp(-x^p t) d\mu(x,0) \int x^{k+p} \exp(-x^p t) d\mu(x,0)}{(\int \exp(-x^p t) d\mu(x,0))^2}
\end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{dS_k(t)}{dt} = -S_{k+p} + S_p S_k\,, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{3.1}$$

A partir daqui podemos continuar o nosso estudo com os determinantes de Hankel, e coeficientes dos polinómios ortogonais.

TEOREMA 3.1. *Se as medidas de ortogonalidade evoluem segundo a transformação de Freud* (1.14), *então o comportamento dos determinantes de Hankel é descrito por:*

$$\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} = -(n+1)S_p + \sum_{j=0}^{p-1}\sum_{i=0}^{j} \ell_{i,n-j+i}\mathcal{L}_{p-i,n-j+k} \tag{3.2}$$

$$\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{\dot{H}_n}{H_n} = -S_p + \sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n}\mathcal{L}_{p-k,n} \tag{3.3}$$

onde $\ell_{k,n}$ são os coeficientes da sucessão de polinómios ortogonais mónicos associada aos pesos de Freud e $\mathcal{L}_{k,n}$ estão definidos por (2.1) *e* (2.4).

De (3.3) e usando (2.11) obtemos:

COROLÁRIO IX.1. *Nas condições do Teorema 3.1 temos*

$$\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{\dot{H}_n}{H_n} = -S_p + \mathcal{V}_{p,0,n} \tag{3.4}$$

onde $\mathcal{V}p, k, n$ está definido por (A).

Como consequência obtemos de (3.4) e tendo em atenção (1.28) a equação diferencial para v_n no Teorema 1.3, a seguinte relação

$$\frac{dv_n}{dt} = (\mathcal{V}_{p,0,n} - \mathcal{V}_{p,0,n+1})\frac{v_n}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA. Usando a expressão (3.1) para as derivadas de $S_n(t)$, podemos derivar o determinante de Hankel. Como consequência temos,

$$-\dot{H}_{n+1} = -(n+1)S_p H_{n+1} + \begin{vmatrix} S_0 & \ldots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-p} & \ldots & S_{2n-p} \\ S_{n+1} & \ldots & S_{2n+1} \\ S_{n-p+2} & \ldots & S_{2n-p+2} \\ \vdots & & \vdots \\ S_n & \ldots & S_{2n} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$
+\begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ S_{n+p-1} & \dots & S_{2n+p-1} \\ S_n & \dots & S_{2n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_n \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-2} & \dots & S_{2n-2} \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-1} \\ S_{n+p} & \dots & S_{2n+p} \end{vmatrix}
$$

$$
= \quad -(n+1)S_p H_{n+1} + \sum_{j=0}^{p} (-1)^j I_{p,n}^j
$$

portanto

$$
-\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} = -(n+1)S_p + \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \mathcal{I}_{p,n}^j \tag{3.5}
$$

De (2.5) sai que

$$
\mathcal{I}_{p,n}^j = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} \ell_{k,n-j+k} \mathcal{I}_{p-k,n-j+k}^0 = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} \ell_{k,n-j+k} \mathcal{L}_{p-k,n-j+k}
$$

logo (3.5) toma a forma

$$
\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} = (n+1)S_p - \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{j} \ell_{k,n-j+k} \mathcal{L}_{p-k,n-j+k}
$$

o que nos leva a (3.2).

De forma a provarmos (3.3), factorizamos a última expressão nas variáveis $\mathcal{L}_{\nu,n}$ e obtemos sucessivamente

$$
\begin{aligned}
&\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} \\
&\quad = (n+1)S_p - \sum_{j_1=1}^{p} \ell_{p,n+j_1} - \sum_{j_2=1}^{p-1} \ell_{p-1,n+j_2} \mathcal{L}_{1,n+j_2} \dots - \sum_{j_\nu=1}^{p-\nu+1} \dots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \ell_{1,n+1} \mathcal{L}_{p-1,n+1} \\
&\quad = (n+1)S_p - \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{j_\nu=1}^{p-\nu+1} \ell_{p-\nu+1,n+j_\nu} \mathcal{L}_{\nu-1,n+j_\nu}
\end{aligned}
$$

e subtraindo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{\dot{H}_n}{H_n} \\
&\quad = S_p - \sum_{\nu=1}^{p} \ell_{p-\nu+1,n+p-\nu+1} \mathcal{L}_{\nu-1,n+p-\nu+1} + \sum_{\nu=1}^{p} \ell_{p-\nu+1,n} \mathcal{L}_{\nu-1,n} \\
&\quad = S_p - \sum_{k=1}^{p} \ell_{k,n+k} \mathcal{L}_{p-k,n+k} - \sum_{k=1}^{p} \ell_{k,n} \mathcal{L}_{p-k,n}\,.
\end{aligned}
$$

Tendo em atenção (2.9) obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{\dot{H}_{n+1}}{H_{n+1}} - \frac{\dot{H}_n}{H_n}\\ &\quad = S_p - \mathcal{L}_{p,n+1} - \sum_{k=1}^{p} \ell_{k,n}\mathcal{L}_{p-k,n}\\ &\quad = S_p - \sum_{k=0}^{p} \ell_{k,n}\mathcal{L}_{p-k,n}\end{aligned}$$

e daqui sai (3.3). ■

Passemos agora ao estudo do comportamento de $\ell_{1,n}$.

TEOREMA 3.2. *Se a medida de ortogonalidade $d\mu(x,t)$ é uma transformação tipo Freud* (1.14)*, então $\ell_{1,n}$ verifica*

$$\dot{\ell}_{1,n} = \sum_{\nu=0}^{p+1} \ell_{p-\nu+1,n}\mathcal{L}_{\nu,n-1} \tag{3.6}$$

onde $\ell_{k,n}$ são os coeficientes dos polinómios ortogonais e $\mathcal{L}_{k,n}$ estão definidos por (2.1) *e* (2.4)*.*

De (3.6), e tomando em consideração (1.26) obtemos o seguinte resultado.

COROLÁRIO IX.2. *Nas condições do Teorema 3.2 temos*

$$\dot{\ell}_{1,n} = \mathcal{V}_{p+1,1,n-1}. \tag{3.7}$$

Como consequência obtemos de (3.7) e de (1.28) a equação para b_n apresentada em Teorema 1.3, i.e.

$$\frac{db_n}{dt} = \mathcal{V}_{p+1,1,n-1} - \mathcal{V}_{p+1,1,n}.$$

Demonstração do Teorema. Sabemos de (1.23) que a expressão para $\ell_{1,n}$ vem dada por

$$-\ell_{1,n}H_n = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \dots & S_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-2} & S_{n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix} = L_{1,n-1} \tag{3.8}$$

que derivada formalmente nos dá

$$\dot{\ell}_{1,n} = \frac{\dot{H}_n}{H_n}\ell_{1,n} + \frac{\dot{L}_{1,n-1}}{H_n}.$$

Vemos assim que necessitamos conhecer as derivadas dos determinantes $L_{1,n-1}$. A partir de (3.1) vemos

$$\dot{L}_{1,n-1} = (n+1)S_p \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-2} & \dots & S_{2n-3} \\ S_n & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-2-p} & \dots & S_{2n-3-p} \\ S_{n-1} & \dots & S_{2n-2} \\ S_{n-p} & \dots & S_{2n-p} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-2} & \dots & S_{2n-3} \\ S_n & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix} + \dots$$

$$- \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-3} & \dots & S_{2n-4} \\ S_{n+p-2} & \dots & S_{2n+p-3} \\ S_n & \dots & S_{2n-1} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} S_0 & \dots & S_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{n-2} & \dots & S_{2n-3} \\ S_{n+p} & \dots & S_{2n+p-1} \end{vmatrix}$$

Donde, com a notação (2.3), obtemos

$$\dot{\ell}_{1,n} = \frac{\dot{H}_n}{H_n}\ell_{1,n} - (n+1)S_p\ell_{1,n} - \ell_{p+1,n} + \sum_{\nu=1}^{p-2}(-1)^\nu \mathcal{J}^\nu_{p,n-1}.$$

Tomando em consideração a expressão para $\dot{H}_n/H_n$ apresentada no teorema anterior e de (3.5) vemos que

$$\dot{\ell}_{1,n} = -\ell_{1,n}\sum_{j=0}^{p-1}(-1)^j\mathcal{I}^j_{p,n-1} - \ell_{p+1,n} - \sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^\nu\mathcal{J}^j_{p,n-1} - \mathcal{L}_{p+1,n-1}. \tag{3.9}$$

Agora de (2.6) e usando duas vezes (2.5) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^\nu_{p,n-1} &= (-\mathcal{I}^\nu_{p,n-1} + (-1)^{\nu+1}\mathcal{I}^0_{p-(\nu+1),n}\ell_{\nu+1,n})\ell_{1,n} \\ &\qquad + (-1)^{\nu+1}\ell_{\nu+1,n}(-\mathcal{I}^0_{p-\nu,n-1} - \mathcal{I}^0_{p-(\nu+1),n}\ell_{1,n}) \\ &= -\mathcal{I}^\nu_{p,n-1}\ell_{1,n} - (-1)^{\nu+1}\ell_{\nu+1,n}(-\mathcal{I}^0_{p-\nu,n-1}\,. \end{aligned}$$

Substituindo esta expressão em (3.9) e simplificando o resultado obtido temos

$$\begin{aligned} -\dot{\ell}_{1,n} &= -\ell_{1,n}\sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^\nu\mathcal{I}^\nu_{p,n-1} - \ell_{p+1,n} - \mathcal{L}_{p+1,n-1} \\ &\qquad + \sum_{\nu=0}^{p-1}(-1)^\nu(\mathcal{I}^\nu_{p,n-1}\ell_{1,n} + (-1)^{\nu+1}\ell_{\nu+1,n}\mathcal{I}^0_{p-\nu,n-1}) \\ &= (-1)^p\ell_{1,n}\mathcal{I}^{p-1}_{p,n} - \ell_{1,n}\mathcal{I}^0_{p,n-1} - \sum_{\nu=1}^{p-2}\ell_{\nu+1,n}\mathcal{I}^0_{p-\nu,n-1} - \mathcal{L}_{p+1,n-1} \end{aligned}$$

De (2.5) e (3.8) esta expressão toma a forma

$$\dot{\ell}_{1,n} = \ell_{p,n}\mathcal{L}_{1,n-1} + \ell_{1,n}\mathcal{L}_{p,n-1} + \ell_{p+1,n}\mathcal{L}_{0,n-1} + \sum_{\nu=1}^{p-2} \ell_{\nu+1,n}\mathcal{L}_{p-\nu,n-1} + \ell_{0,n}\mathcal{L}_{p+1,n-1}$$

que coincide com (3.6). ■

Obtemos o Teorema 1.3 a partir dos corolários dos Teoremas 3.1 e 3.2.

BIBLIOGRAFIA

1. N.I. Achieser, *The Classical Moment Problem and Some Related Topics in Analysis*, Hafner, New York, 1965.
2. ______, *Theory of Approximation*, Dover, 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501, 1992.
3. L. Ahlfors, *Complex Anaysis*, McGraw-Hill International Editions, Madrid, 1979, Third Ed.
4. W. Al-Salam, *Characterization theorems for orthogonal polynomials*, In Orthogonal Polynomials: Theory and Practice (P. Nevai, ed.), NATO-ASI Series C, vol. 294, Kluwer, Dordrecht, 1990, pp. 1–24.
5. W. Al-Salam and T.S. Chihara, *Another characterization of the classical orthogonal polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **3** (1972), no. 1, 65–70.
6. W. Al-Salam and A. Verma, *Some sets of orthogonal polynomials*, Rev. Técn. Fac. Ingr. Univ. Zulia **9** (1986), no. 2, 283–303.
7. M. Alfaro, A. Branquinho, F. Marcellán, and J. Petronilho, *A generalization of a theorem of S. Bochner*, Publicaciones del Seminario Matemático García Galdeano **II** (1992), no. 11 (1), 9.
8. A.I. Aptekarev, *Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices*, Mat. Sb. **125** (1984), no. 167, 231–258, English transl. in Math. USSR Sb. **53** (1986), 233-260.
9. ______, *Forced motion of semi-infinite Langmuir lattice*, In Function Theory and Approximations (Sratov), vol. 2, Izd. SGU, 1986, pp. 17–21 (Russian).
10. A.I. Aptekarev, A. Branquinho, and F. Marcellán, *Isospectral deformations of jacobi matrices and recurrence relations*, Pré-Publicações. Dep. Math. Univ. Coimbra (1996), no. 4, 18.
11. R. Askey and J. Wimp, *Associated Laguerre and Hermite polynomials*, Proc.Royal Soc. Edinburgh (1984), no. 96 A, 15–37.
12. F.V. Atkinson, *Discrete and Continuous Boundary Problems*, Academic Press, New York-London, 1964.
13. S. Belmehdi, *Formes Linéaires et Polynômes Orthogonaux Semi-Classiques de Class s=1. Description et Classification*, Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1990.
14. ______, *On semi-classical linear functionals of class s=1. Classification and integral representations*, Indag. Mathem. N.S. **3** (1992), no. 3, 253–275.
15. R.P. Boas, *The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation*, Bull. of the Amer. Math. Soc. **45** (1939), 399–404.
16. S. Bochner, *Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme*, Math. Zeit. **29** (1929), 730–736.
17. S. Bonan, D. Lubinsky, and P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives II*, SIAM Journ. Math. Anal. **18** (1987), 1163–1176.
18. S. Bonan and P. Nevai, *Orthogonal polynomials and their derivatives*, J. Aprox. Theory **40** (1984), 134–147.
19. A. Branquinho, *Polinómios Ortogonais e Funcionais de Momentos: Problemas Inversos*, Master's thesis, Coimbra Univ., Dept. de Matemática. Coimbra. Portugal, May 1993.
20. ______, *A note on semi-classical orthogonal polynomials*, ΘBull. Belg. Math. Soc. **3** (1996), 1–12.

21. A. Branquinho and A. Foulquié Moreno, *A non-homogeneous linear differential equation that has orthogonal polynomials solutions*, Pré-Publicações. Dep. Math. Univ. Coimbra (1995), no. 22, 17.
22. A. Branquinho, L. Golinskii, and F. Marcellán, *Rational modifications of lebesgue measure on the unit circle and an inverse problem*, Pré-Publicações. Dep. Math. Univ. Coimbra (1995), no. 25, 13.
23. A. Branquinho and F. Marcellán, *Some inverse problems for second order structure relations*, In Approximation and Optimization (J. Guddat, ed.), Peter Lang, European Science Publishers, Frankfurt, 1995, pp. 129–146.
24. ______, *Generating new sequences of orthogonal polynomials*, Inter. J. of Math. and Math. Sci. **19** (1996), no. 4, 643–656.
25. A. Branquinho, F. Marcellán, and J. Petronilho, *On inverse problems for orthogonal polynomials I*, J. Comput. Appl. Math. **49** (1993), 153–160.
26. ______, *Classical orthogonal polynomials: A functional approach*, Acta Appl. Math. **34** (1994), no. 3, 283–303.
27. A. Branquinho, A. Foulquié Moreno, and F. Marcellán, *On inverse problems for orthogonal polynomials satisfying a differential-difference equation*, Advances in Mathematical Analysis (Milovanović, ed.), vol. 2, ?, 1996, pp. ?–?
28. C. Brezinski, *Padé Type Approximation and General Orthogonal Polynomials*, Birkhaüser Verlag, Basel, 1980.
29. ______, *A direct proof of the Christoffel-Darboux identity and its equivalence to the recurrence relationship*, J. Comp. App. Math. **32** (1990), no. 1-2, 17–25.
30. J. Bustoz and M.E.H. Ismail, *The associated ultraspherical polynomials and their q-analogues*, Canad. J. Math. **34** (1982), 718–736.
31. A. Cachafeiro and F. Marcellán, *Orthogonal polynomials and jump modifications*, In Orthogonal Polynomials and Their Applications (M. ALFARO et al., ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1329, Springer Verlag, Berlin, 1988, pp. 236–240.
32. B. Chabat, *Introduction à l'Analyse Complexe*, vol. I, Mir, Moscovo, 1990.
33. N.G. Chebotarev, *The Theory of Algebraic Functions*, Gostekhizdat, Moscovo, 1948 (Russian).
34. T.S. Chihara, *On co-recursive orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 899–905.
35. ______, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
36. E.B. Christoffel, *Über die Gaussische quadratur and eine verallgemeinerung derselben*, J. Reine Angew. Math. **55** (1958), 61–82.
37. G.V. Chudnovsky, *Rational and Padé approximations to solutions of linear differential equations and monodromy theory*, In Proc. Les Houches Internat. Colloq. Complex Analysis and Relativistic Quantum Field Theory, Lecture Notes in Phys., vol. 126, Springer Verlag, New York, 1980, pp. 136–169.
38. J.S. Dehesa, F. Marcellán, and A. Ronveaux, *On orthogonal polynomials with perturbed relations*, J. Comp. App. Math. **30** (1990), no. 2, 203–212.
39. D.J. Dickinson, *On quasi-orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 185–194.
40. A. Durán, *Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials*, Rocky. Mountain. J. Math. **23** (1993), no. 1, 87–104.
41. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F.G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1953.
42. T. Erdelyi, J.S. Geronimo, P. Nevai, and J. Zhang, *A simple proof of "Favard's Theorem" on the unit circle*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **29** (1991), 41–46.
43. J. Favard, *Sur les polynômes de Tchebicheff*, C.R. Acad. Sci. Paris **200** (1935), 2052–2053.
44. B. Fischer and G.H. Golub, *How to generate unknown orthogonal polynomials out of known orthogonal polynomials*, J. Comp. App. Math. **43** (1992), no. 1-2, 99–115.
45. H. Flaschka, *Toda lattice I. Existence of integrals*, Phys. Rev **B9** (1974), 1924–1925.

46. ———, *Toda lattice II. Inverse scattering solution*, Progr. Theor. Phys. **51** (1974), 703–706.
47. G. Freud, *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
48. ———, *On the coefficients in the recursion formulae of orthogonal polynomials*, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. **A76** (1976), 1–6.
49. J.L. Gammel and J. Nuttall, *Note on generalized Jacobi polynomials*, In The Riemann Problem, Complete Integrability and Arithmetic Applications (A. Dold and B. Eckmann, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 925, Springer Verlag, Berlin, 1982, pp. 258–270.
50. P. García-Lázaro and F. Marcellán, *Christoffel formulas for n-kernels associated to Jordan arcs*, In Polynômes Orthogonaux et Applications (C.BREZINSKI et al., ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1171, Springer Verlag, Berlin, 1985, pp. 195–203.
51. P. García-Lázaro, F. Marcellán, and C. Tasis, *On a Szegő's result: Generating sequences of orthogonal polynomials onthe unit circle*, In Orthogonal Polynomials and Their Applications (C.BREZINSKI et al., ed.), vol. 9, J.C.Baltzer AG. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, no. (1-4), 1991, pp. 271–274.
52. P. García-Lázaro and L. Moral, *Quasi-orthoganality on Laurent polynomials*, In Orthogonal Polynomials and their Applications (C.BREZINSKI et al., ed.), vol. 9, IMACS Annals on Comp. and Appl. Math., no. (1-4), J.C. Baltzer, Basel, 1991, pp. 267–270.
53. C. Gardner, J. Green, M. Kruskal, and R. Miura, *A method for solving the Korteweg-de Vries equation*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967), 1095–1098.
54. Ya.L. Geronimus, *On polynomials orthogonal with respect to numerical sequences and on Hahn's theorem*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **4** (1940), 215–228.
55. ———, *On some finite-difference equations and the corresponding systems of orthogonal polynomials*, Har'kov. Gos. Univ. Ucĕn. Zap. 80 = Zap. Mat. Otd. Fiz.-Mat. Fak. i Har'kov. Mat. Obsec. **25** (1957), no. 4, 87–100 (Russian).
56. ———, *Polynomials Orthogonal on a Circle and Interval*, vol. 18, International Series on Applied Mathematics, Pergamon Press, London, 1960.
57. ———, *Polynomials orthogonal on a circle and their applications*, Amer. Math. Soc. Transl. Series **3** (1962), no. 1, 1–78.
58. E. Godoy and F. Marcellán, *An analog of the Christoffel formula for polynomial modification of a measure on the unit circle*, Boll. Un. Mat. It. **7** (1991), no. 5-A, 1–12.
59. ———, *Orthogonal polynomials and rational modifications of measures*, Canad. J. Math. **45** (1993), no. 5, 930–943.
60. J.V. Gonçalves, *Sur une formule de recurrence*, Portugaliæ Math. **3** (1942), no. 3, 222–233.
61. ———, *Sur la formule de Rodrigues*, Portugaliæ Math. **4** (1943), no. 1, 52–64.
62. A.A. Gončar, *On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions*, Math. USSR Sbornik **26** (1975), no. 4, 555–575.
63. Z.S. Grinshpun, *On a class of orthogonal polynomials*, Vestnik Leningrad Univ. Math. **19** (1966), 147–149 (Russian).
64. ———, *Differential equations for the Bernstein-Szegő orthogonal polynomials*, Differential Equations **26** (1990), no. 5, 545–550.
65. C.C. Grosjean, *Theory of recursive generation of systems of orthogonal polynomials: An ilustrative example*, J. Comp. Appl. Math. (1985), no. 12-13, 299–318.
66. M. Guerfi and P. Maroni, *Polynômes orthogonaux inverses des polynômes orthogonaux classiques*, In Polinomios Ortogonales y Aplicaciones (L. Arias de Velasco Villa et al., ed.), Actas VI Simp., vol. ?, Publ. Univ. Oviedo, Gijón, 1990, pp. 179–186.
67. G. Sh. Guseinov, *Determination of an infinite Jacobi matrix from scattering data*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **227** (1976), no. 6, 1289–1292 (Russian).
68. W. Hahn, *Über die jacobischen polynome und zwei verwandte polynomklassen*, Math. Zeit. (1935), no. 39, 634–638.
69. ———, *Über differentialgleichungen für orthogonalpolynome*, Monat. Math. (1983), no. 95, 269–274.

70. E. Hendriksen and H.van Rossum, *Semi-classical orthogonal polynomials*, In Polynômes Orthogonaux et Applications (C.BREZINSKI et al., ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1171, Springer Verlag, Berlin, 1985, pp. 354–361.
71. M. Henon, *Integrals of the Toda lattice*, Phys. Rev. **B9** (1974), 1924–1925.
72. G. Herglotz, *Über potenzreihen mit positivem reelen teil im einheitskreis*, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl. **63** (1911), 501–511.
73. A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Norset, and J.M. Sanz-Serna, *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, J. of Appr. Theory **65** (1991), 151–175.
74. M.E.H. Ismail and R.W. Ruedemann, *Relation between polynomials orthogonal on the unit circle with respect to different weights*, J. Approx. Th. **71** (1992), 39–60.
75. M. Kac and P. Van Moerbeke, *On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices*, Adv. in Math. **16** (1975), 160–169.
76. D. Karlin and G. Szegő, *On certain determinants whose elements are orthogonal polynomials*, Journal d'Analyse Mathematique **8** (1961), 1–157.
77. H. Kiesel and J. Wimp, *Non-linear recurrence relations and some derived orthogonal polynomials*, Ann. Num. Math. **2** (1995), 169–180.
78. S.S. Kim, K.H. Kwon, and S.S. Han, *Applications of hyperfunctions to orthogonal polynomials*, In Differential Equations and Feynman Integrals (K.H. KWON, ed.), Seoul National University, 1990, pp. 354–361.
79. A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin, *Introduction to Real Anaysis*, Dover, 31 East 2nd Street, Mineola, N.Y. 11501, 1970.
80. H.L. Krall, *On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order equation*, Tech. report, The Pensylvania State College Studies, Pensylvania, USA, 1940.
81. H.L. Krall and O. Frink, *A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1968), 467–490.
82. H.L. Krall and I.M. Sheffer, *On pairs of related orthogonal polynomials sets*, Math. Zeitschr. **86** (1965), 425–450.
83. E. Laguerre, *Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les coefficients sont rationnels*, J. Math. Pures Appl. **1** (1985), no. 4, 135–165, in Oeuvres, Vol. II, Chelsea, N.Y. (1972), 685-711.
84. O.E. Lancaster, *Orthogonal polynomials defined by difference equations*, Amer. J. Math. **63** (1941), 185–207.
85. P.D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math. **21** (1968), 467–490.
86. X. Li and K. Pan, *Asymptotic behaviour of orthogonal polynomials corresponding to measures with discret part off the unit circle*, J. Approx. Th. **79** (1994), 54–71.
87. L.L. Littlejohn, *A survey of recent results on the connection between orthogonal polynomials and differential equations*, Tech. report, Utah State University, Logan. USA, 1984, Department of Mathematics.
88. D.S. Lubinsky, *A survey of general orthogonal polynomials for weights on finite and infinte intervals*, Acta Appl. Math. **10** (1987), 237–296.
89. A.P. Magnus, *A proof of Freud's conjecture about orthogonal polynomials related to* $|x|^\rho \exp(-x^{2m})$*, for integer* m, In Polynômes Orthogonaux et Applications (C. Brezinski et al., ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1171, Springer Verlag, Berlin, 1985, pp. 362–372.
90. ———, *On Freud's equations for exponential weights*, J. Approx. Theory **46** (1986), 65–99.
91. ———, *Asymptotics for the simplest generalized Jacobi polynomials. Recurrence coefficients from Freud's equations: Numerical explorations*, Annals of Numer. Math. **2** (1995), 311–326.
92. ———, *Painlevé-type differential equations for the recurrence coefficients of semi-classical orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **57** (1995), 215–237.
93. S.V. Manakov, *Complete integrability and stochastization in discrete dynamical systems*, Sov. Phys. JETP **40** (1975), 269–274 (Russian).

94. F. Marcellán and P. Maroni, *Orthogonal polynomials on the unit circle and their derivatives*, Constr. Approx. **7** (1991), 341–348.
95. F. Marcellán, F. Peherstorfer, and R. Steinbauer, *Orthogonality properties of linear combinations of orthogonal polynomials*, (submitted).
96. F. Marcellán and J. Petronilho, *On the solution of some distributional differential equations: existence and characterizations of the classical moment functionals*, Integral Transforms and Special Functions **2** (1994), 185–218.
97. F. Marcellán and A. Ronveaux, *Co-recursive orthogonal polynomials and fourth order differential equations*, J. Comp. Appl. Math. **25** (1989), 105–109.
98. F. Marcellán and C. Tasis, *Sobre cuasi-ortogonalidad en la circunferencia unidad. Aplicaciones*, In XII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas (Universidad de Valladolid), 1988.
99. V. A. Marchenko, *Spectral Theory of Sturm-Liouville Operators*, Naukova Dumka, Kiev, 1972 (Russian).
100. P. Maroni, *Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques*, Ann. Math. Pura ed App. **149** (1987), no. 4, 165–184.
101. ———, *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semiclassiques*, In Orthogonal Polynomials and Their Applications (M. ALFARO et al., ed.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1329, Springer Verlag, Berlin, 1988, pp. 279–290.
102. ———, *Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme* $u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}l$, Period. Math. Hungar. **21** (1990), no. 3, 223–248.
103. ———, *Une théorie algébrique des polynômes orthogonaux: Application aux polynômes orthogonaux semiclassiques*, In Orthogonal Polynomials and their Applications (C.BREZINSKI et al., ed.), vol. 9, J.C.Baltzer AG. Basel IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics, no. (1-4), 1991, pp. 95–130.
104. ———, *Variations around classical orthogonal polynomials. connected problems*, J. Comp. Appl. Math. **48** (1993), 133–155.
105. ———, *Introduction to second degree forms*, Adv. Comp. Math. **3** (1995), no. 1-2, 59–88.
106. ———, *Tchebychev forms and their perturbed as second degree forms*, Ann. Num. Math. **2** (1995), no. ?, ?–?
107. A. Mate, P. Nevai, and V. Totik, *Szegő's extremum problem on the unit circle*, Ann. of Math. **134** (1991), 433–453.
108. P.J. McCarthy, *Characterizations of classical polynomials*, Port. Math. **20** (1961), no. 1, 47–52.
109. P. Montel, *Leçons Sur les Récurrences et leur Applications*, Gauthier-Villars, Paris, 1957.
110. J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. in Math. **16** (1975), 197–220.
111. I.P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1955.
112. P. Nevai, *Orthogonal Polynomials*, vol. 213, Memoires Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979.
113. ———, *Orthogonal polynomials associated with* $\exp(-x^4)$, Second Edmonton Conference on Approximation Theory, Can. Math. Soc. Conf. Proc., vol. 3, 1983, pp. 263–285.
114. ———, *Asymptotics for orthogonal polynomials associated with* $\exp(-x^4)$, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), no. 6, 1177–1187.
115. ———, *Géza Freud, orthogonal polynomials and Christoffel functions. A case study*, J. Aprox. Theory **48** (1986), 3–167.
116. ———, *Orthogonal polynomials, measures and recurrences on the unit circle*, Trans. Amer. Math. Soc. **300** (1987), no. 1, 175–189.
117. P. Nevai and W. Van Assche, *Compact perturbations of orthogonal polynomials*, Pacific J. Math. **153** (1992), 163–184.
118. A.F. Nikiforov and V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics: An Unified Approach*, Birkhaüser Verlag, Basel, 1988.

119. ПЕ.M. Nikishin, *The discrete Sturm-Liouville operator and some problems of function theory*, J. Soviet Math. **35** (1987), no. 5, 2679–2744.
120. E.M. Nikishin and V.N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, vol. 92, Translations of Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.
121. F. Peherstorfer, *A special class of polynomials orthogonal on the unit circle including the associated polynomials*, Const. Approx. (To appear).
122. ______, *Zeros of linear combinations of orthogonal polynomials*, Proc. Cambridge Math. Soc. **?** (?), ?–?
123. ______, *Linear combinations of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas*, Math. Comput. **55** (1990), 231–241.
124. ______, *On Bernstein-Szegő orthogonal polynomials on several intervals*, SIAM J. Math. Anal. **21** (1990), no. 2, 461–482.
125. ______, *On Bernstein-Szegő orthogonal polynomials on several intervals II. Orthogonal polynomials with periodic recurrence coefficients*, J. Approx. Theory **64** (1991), 123–161.
126. H. Poincaré, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*, Amer. J. Math. **7** (1885), 203–258.
127. F. Pollaczek, *Sur la Généralisation des Polynômes de Jacobi*, vol. 131, Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier Villars, Paris, 1956.
128. E.A. Rakhmanov, *Strong asymptotics for orthogonal polynomials*, In Methods of Approximation Theory in Complex Analysis and Mathematical Physics (A.A. Gončar and E.B. Saff, eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1549, Springer Verlag, Berlin, 1993, pp. 71–97.
129. V. Romanovsky, *Sur quelques classes nouvelles de polynômes orthogonaux*, C.R. Acad. Sci. Paris **188** (1929), 1023–1025.
130. A. Ronveaux, *Polynômes orthogonaux dont les polynômes dérivés sont quasi-orthogonaux*, C.R. Acad. Sc. Paris (1979), no. 289 A, 433–436.
131. ______, *Fourth-order differential equations for the numerator polynomials*, J. Phys. A.: Math. Gen. **21** (1988), L749–L753.
132. W. Rudin, *Real and Complex Anaysis*, McGraw-Hill International Editions, Madrid, 1987, Third Ed.
133. E.B. Saff, *Orthogonal polynomials from a complex perspective*, In Orthogonal Polynomials: Theory and Practice (P. Nevai, ed.), NATO-ASI Series C, vol. 294, Kluwer, Dordrecht, 1990, pp. 363–393.
134. J. Sherman, *On the numerators of the convergents of the stieltjes continued fractions*, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 64–87.
135. J.A. Shohat, *The relation of the classical orthogonal polynomials to the polynomials of appell*, Amer. J. Math. **58** (1936), 453–464.
136. ______, *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), 461–496.
137. ______, *A differential equation for orthogonal polynomials*, Duke. Math. J. **5** (1939), 401–417.
138. H. Stahl and V. Totik, *General orthogonal Polynomials*, vol. 43, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 1992.
139. T.J. Stieltjes, *Sur les polynômes de Jacobi*, C.R. Acad. Sci. Paris **100** (1885), 620–622.
140. ______, *Sur quelques théorèmes d'algèbre*, C.R. Acad. Sci. Paris **100** (1885), 439–440.
141. ______, *Sur les racines de l'équation* $X_n = 0$, Acta Math. **9** (1886), 385–400.
142. M. Stone, *Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis*, vol. 15, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, Rhode Island, 1932.
143. G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, vol. 23, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, Rhode Island, 1975, Fourth Ed.
144. M. Toda, *Waves in non-linear lattice*, Progr. Theor. Phys. Suppl. **45** (1970), 174–200.
145. F. Tricomi, *Equazioni diferenziali*, Torino, 1948.
146. ______, *Vorlesungen über Orthogonalreihen*, Springer Verlag, Berlin, 1970, (Second Edition).

147. V.B. Uvarov, *The connection between systems of polynomials orthogonal with respect to different distribution functions*, U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. **9** (1969), no. 6, 33–36.
148. W. Van Assche, *Constructive Methods in the Analysis of Orthogonal Polynomials*, Ph.D. thesis, Leuven University, Leuven, 1992.
149. ______, *Analytic aspects of the orthogonal polynomials*, Tech. report, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven. Belgium, 1993.
150. B. Wendroff, *On orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 554–555.
151. J. Wimp, *Explicit formulas for the associated Jacobi polynomials and some applications*, Can. J. Math. **39** (1987), no. 4, 983–1000.
152. Y. Xu, *A characterization of positive quadrature formulae*, Math. Comput. **206** (1994), no. 62, 703–718.

ÍNDICE REMISSIVO

base dual, 8

classe
  $\mathcal{M}_2$, 176
  de Blumenthal-Nevai, 21
  de Szegő, $\mathcal{S}$, 59
conjunto convexo, 6

deformação isospectral, 199
Desigualdade
  de Jensen, 55
discriminante, 95
domínio, 24

equação
  de Pearson, 14
equações
  de Korteweg-de Vries, 200
  de Langmuir, 200
  de Toda, 199
  tipo Toda, 203

Fórmula
  de Christoffel-Darboux, 53
fórmula de quadratura de Gauss, 19
família
  livre de polinómios, 5
  normal, 58
função
  de Caratheodory, 175
  de Christoffel, 201
  de Szegő, 59
  harmónica, 55
  peso, 14
    semi clássica generalizada, 203
funcional linear, 5
  de Laguerre-Hahn, 170
  de segundo grau, 169
  definida positiva, 7, 34
  inversa, 161
  regular, 5, 34

invólucro convexo, 6

matriz
  de Jacobi, xiv
    de ordem n, 18
medida
  de Borel, 7, 139
    absolutamente contínua, 41
  normalizada, 182
  tipo Freud, 203

números de Christoffel, 20
nodos, 8

par de Lax, 199
parâmetros de reflexão, 32
polinómio interpolador
  de Lagrange, 19
  de Lagrange-Sylvester, 8
polinómios
  de Bernstein-Szegő, 47
  de Bessel, 14
  de Hermite, 13
  de Jacobi, 13
  de Laguerre, 13
potencial logarítmo, 95
problema
  directo, 142
problema espectral
  directo, 197
  inverso, 197
problemas inversos
  diferenciais, 114
  estruturais, 116
produto de Blaschke, 74

quase ortogonal
  de ordem s, 10
quase ortogonalidade, 10

sucessão
  de polinómios ortogonais
    associada, 11
  de momentos, 5
  de poliómios ortogonais associada
    de primeira espécie, 36
  de polinómios ortogonais, 5

afins, 12
clássica, 13
co-recursiva, 11
Jacobi Generalizada, 132
mónicos, 5
semi clássicos, 116
simétrica, 44
suporte da medida, 6

Teorema
de Dini, 59
de Fejér-Riesz, 45
de Geronimus, 70
de Gončar, 73
de Hurwitz, 58
de Lax, 199
de Markov, 12
de Montel, 58
de Nikishin, 74
de Poincaré, 26
de Rouché, 39
de Stieltjes-Vitali, 24
de Szegő, 55
do Prolongamento Analítico, 58
Trigonométrico de Momentos, 32
transformada
algébrica de Stieltjes, 169
de Stieltjes, 12

verdadeiro intervalo de ortogonalidade, 7